اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة تقني رياضي و ثالثة علمي — المدة: ساعتان

التمرين الأول:

لتكن g الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$. و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i};\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن انه من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$. ثم شكل جدول تغيراتها

3) ا) بيّن ان المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ، (Δ') معادلتهما :

$y=x+2$ و $y=x$ في جوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

ب) بيّن أن المنحنى (C_g) يقع داخل الشريط المحدد بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

4) بيّن ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها .

5) أكتب معادلة المماس (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة A ذات الفاصلة 0 .

6) ا) بيّن انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x)+g(-x)=2$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) احسب $g(1)$ و إستنتج $g(-1)$ ثم احسب $g(2)$ و إستنتج $g(-2)$.

ج) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن المنحنى C_g يقطع حامل محور الفواصل مرة وحيدة في نقطة فاصلتها α بحيث: $-2<\alpha<-1$.

7) ارسم كلا من (Δ) ، (Δ') و (T) ثم أرسم المنحنى (C_g).

8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $me^x+m-2=0$.

9) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.(عبارة h غير مطلوبة)

ا) احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة h . ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) أثبت أن النقطة A مركز تناظر للمنحنى (C_h) .(إرشاد إستعن بالإجابة عن السؤال 6)ا)

التمرين الثاني:

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كمايلي: $f(x)=x(2-x)$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $8cm$)

ا) عيّن إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;2]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) انشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ على المجال $[0;2]$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{8} \\ u_{n+1}=u_n(2-u_n) \end{cases}$

ا) بإستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل دون حساب كل من u_0، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

ب) بيّن ان المتتالية متزايدة تماما. إستنتج أنها متقاربة ماهي نهايتها ؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(1-u_n)$

ا) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) ا) احسب بدلالة n الجداء p_n حيث: $p_n=(1-u_0)(1-u_1)...(1-u_n)$

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

الأساتذة

تصحيح الاختبار الأول 2021/20

تمرين ①

• $\lim_{x\to-\infty} x+\frac{2}{e^x+1} = \boxed{-\infty}$

• $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{e^x+1} = \boxed{+\infty}$

② g قابلة للاشتقاق على IR و

$$g'(x) = 1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

g متزايدة تماما على IR

جدول تغيراتها

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

③ • $\lim_{x\to-\infty}(g(x)-x-2) = \lim \frac{2}{e^x+1}-2 = 0$

ومنه $y=x+2$ م م م بجوار $(-\infty)$

• $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim \frac{2}{e^x+1} = 0$

ومنه $y=x$ م م م بجوار $(+\infty)$ لـ (C_g)

ب- الوضع النسبي لـ (C_g) و (Δ)

$$g(x)-y = \frac{2}{e^x+1}-2 = \frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$$

(C_g) يقع تحت (Δ)

الوضع النسبي لـ (C_g) و (Δ')

$$g(x)-y = \frac{2}{e^x+1} > 0$$

(C_g) يقع فوق (Δ')

ومنه (C_g) يقع في الشريط المحدد بـ (Δ) و (Δ')

④ g' قابلة للاشتقاق على IR و

$$g''(x) = \frac{2e^x(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x+1)^4}$$

إشارة $g''(x)$ من إشارة (e^x-1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه $f(0)=1$ و $A(0,1)$ نقطة انعطاف لـ (C_g)

⑤ $(T): y=\frac{1}{2}x+1$

⑥ $g(x)+g(-x) = x+\frac{2}{e^x+1}-x+\frac{2}{e^{-x}+1}$

$$= \frac{2+2e^x}{e^x+1} = \frac{2\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{(e^x+1)}} = \boxed{2}$$

لاحظ أنه من أجل كل $x\in IR$ ، $-x\in IR$

و $g(-x)+g(x)=2$

فإن $A(0,1)$ مركز تناظر لـ C_g

ب- $g(1)=\frac{e+3}{e+1}$

$g(-1) = -g(1)+2 = \frac{e-1}{e+1}$

$g(2) = \frac{2e^2+4}{e^2+1}$

$g(-2) = -g(2)+2 = \frac{-2}{e^2+1}$

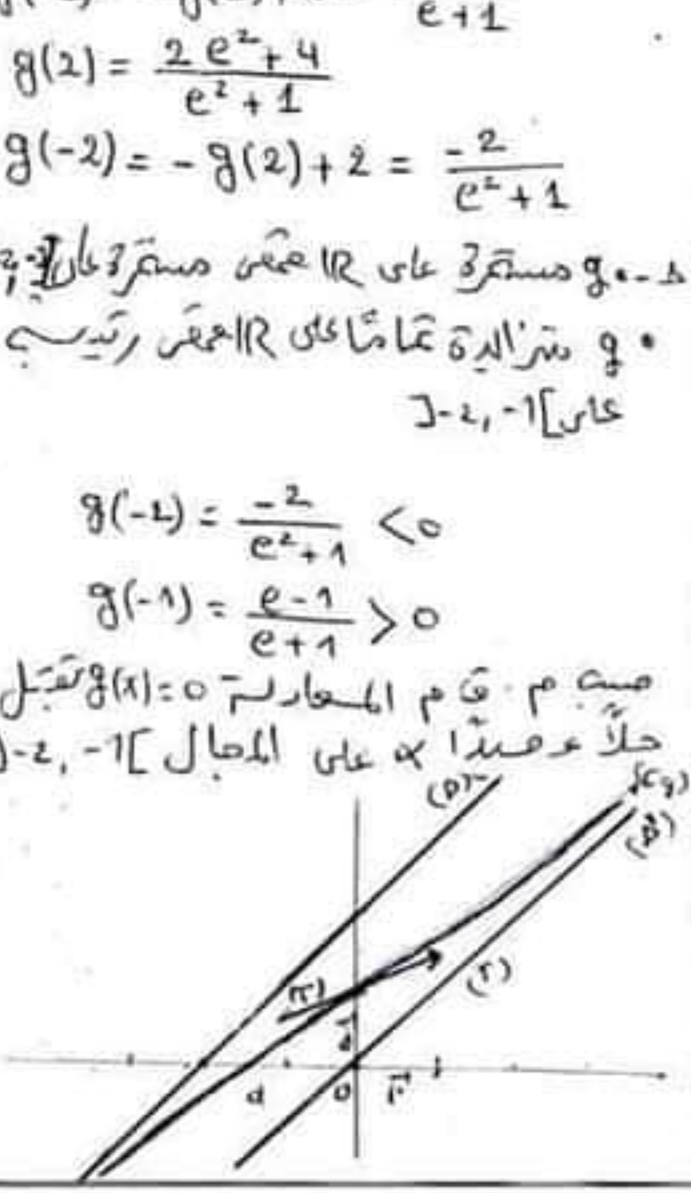
جـ- g مستمرة على IR محقق مستمرة على $[-2,-1]$

• g متزايدة تماما على IR محقق رتيبة على $]-2,-1[$

$g(-2) = \frac{-2}{e^2+1} < 0$

$g(-1) = \frac{e-1}{e+1} > 0$

حسب م ق م المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-2,-1[$



⑧

$me^{x}+m-2=0$

$(e^{x}+1)m = 2$

$x + \frac{2}{e^{x}+1} = x + m = g(x)$.

m	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
المناقشة	لا تقبل حلول	لا تقبل	حل موجب	حل معدوم	حل سالب	لا تقبل	لا تقبل حلول

⑨ أ-

$h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\lim_{x\to-\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = g(0) = \boxed{1}$
- $\lim_{x\to+\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{1}$
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{-\infty}$
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{+\infty}$

ب- h قابلة للاشتقاق على IR^* و

$h'(x) = \frac{-1}{x^2}\, g'\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا g دالة متزايدة تماما على IR^*

و $x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة متناقصة تماما على IR^*

ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right)$ دالة متناقصة تماما على IR^*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$	
$h(x)$	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1

جـ- $A(0,1)$ مركز تناظر لـ (C_h) يعني $x\in IR^*$ ، $-x\in IR^*$

$h(-x)+h(x)=2$

لدينا $g\left(-\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{x}\right)=2$

ولدينا من (1)

$g(-x)+g(x)=2$

بوضع $x=\frac{1}{x}$ نجد:

$g\left(-\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{x}\right)=2$

$h(-x)+h(x)=2$

أ ① -1

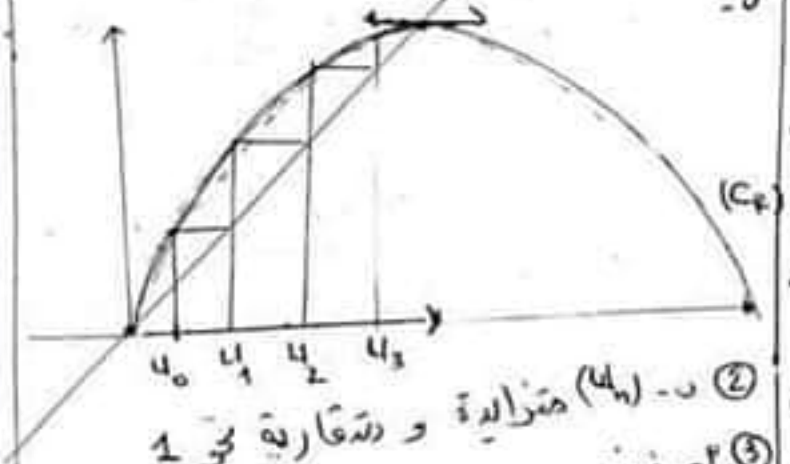
$f(x) = x(2-x)$

$f'(x) = -2x+2$

f متزايدة على المجال $[0,1]$ ومتناقصة على $[1,2]$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

ب-



② ب- (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 1

③ -1 نبرهن

$P(n):\ 0<u_n<1$ ، $n\in IN$

$n=0$

$P(0):\ 0<u_0<1$

لدينا $0<\frac{1}{8}<1$ محقق

نفرض صحة: $P(k):\ 0<u_k<1$ من أجل $k\geq 0$

ونبرهن صحة $P(k+1):\ 0<u_{k+1}<1$

لدينا $0<u_k<1$

و f متزايدة يعني $f(0)<f(u_k)<f(1)$

يعني $0<u_{k+1}<1$

وهو المطلوب ومنه من أجل $n\in IN$ $P(n)$ محققة.

ب- اتجاه تغير (u_n):

$u_{n+1}-u_n = u_n(2-u_n)-u_n$

$= u_n(-u_n+1)$

u_n		0		1	
$u_{n+1}-u_n$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه (u_n) متزايدة تماما على IN .

• بما أن (u_n) متتالية متزايدة ومحدودة
من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة

• نهايتها: نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

يعني $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

يعني $\ell(2-\ell) = \ell$

يعني $\ell = 0$ (مرفوض لأن (u_n) متزايدة و $u_n > 0$)

أو $\ell = 1$ مقبول

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{1}$

4) (v_n) هندسية يعني $v_{n+1} = q v_n$

$$v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1})$$
$$= \ln(1-u_n(2-u_n))$$
$$= \ln(1-u_n)^2$$
$$= 2\ln(1-u_n) = 2v_n$$

(v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$v_0 = \ln(1-\frac{1}{8}) = \ln(\frac{7}{8})$

$v_n = \ln(1-u_n) \Rightarrow e^{v_n} = 1-u_n$

ومنه

$-e^{v_n} + 1 = u_n$

$$\boxed{u_n = 1 - e^{(\ln\frac{7}{8})\cdot 2^n}}$$

النهاية

$$\lim 1 - \underbrace{e^{\overbrace{\ln\frac{7}{8}\cdot 2^n}^{=-\infty}}}_{0} = \boxed{1}$$

5)

$P_n = (1-u_0)(1-u_1)\times \cdots \times(1-u_n)$

$P_n = e^{v_0}\cdot e^{v_1}\cdots\cdots e^{v_n}$

$P_n = e^{(v_0+v_1\cdots+v_n)}$

$P_n = e^{-\ln\frac{7}{8}(1-2^{n+1})}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim e^{\overbrace{-\ln\frac{7}{8}(1-2^{n+1})}^{=-\infty}} \cdot 0$

$= \boxed{0}$