فرض الفصـــــل الثاني
في مادة الرياضيات

المستوى: ثانية ثانوي – شعبة رياضيات | المدة: 1 سا و 15 د | الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

ملاحظة: يمنع إستعمال اللون الأحمر والأخضر

التمرين الأول [05 نقاط]

ABC مثلث، G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha);(B;-2\alpha);(C;\alpha-1)\}$ حيث α عدد حقيقي

❶ بيّن أنّ G موجودة من أجل كل α حقيقي

❷ بيّن أنّ: $\overrightarrow{AG}=2\alpha\overrightarrow{AB}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$

❸ أثبت أن النقط A، B و G في استقامية إذا وفقط إذا كان $\alpha=1$

التمرين الثاني [06 نقاط]

جهاز الكتروني يحتوي على شاشة مكونة من 9 خانات مرقمة كما هو موضح:

0	10	30
0	20	0
10	0	10

عند وضع الجهاز في حالة تشغيل تضيء إحدى الخانات بصفة عشوائية (جميع الخانات لها نفس حظوظ الإضاءة).

للعب جولة بالجهاز، على اللاعب أن يضع 10 دينار لتشغيل الجهاز، فيتحصل اللاعب على مبلغ يساوي "القيمة" الظاهرة في الخانة المضيئة.

I) نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يعطينا الربح المالي الصافي بالدينار للاعب في كل جولة

❶ عيّن القيم الممكنة للمتغير X، ثم عيّن قانون احتماله

❷ احسب $P(X>0)$

❸ احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

II) نريد تغيير "القيمة" التي في الأعلى على اليمين بحيث يكون معدل الربح المالي للاّعب مساويا لـ 0

- ما هي "القيمة" التي يجب وضعها في هاته الخانة؟

التمرين الثالث [09 نقاط]

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

❶ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: a, b, c بحيث كل x من D_f:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

❷

أ/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب/ حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❸ أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❹ جد إحداثي ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، ثم أثبت أنّها مركز تناظر لـ (C_f)

❺ أنشئ كلا من (Δ) و (C_f)

❻ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2-2x+2=mx-m$

تصحيح مقترح
لفرض الفصل الثاني
في مادة الرياضيات

المستوى: ثانية ثانوي – شعبة رياضيات | الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

ملاحظة: يمنع إستعمال اللون الأحمر والأخضر

التمرين الأول [05 نقاط]

❶ تبيين أنّ G موجودة من أجل كل α حقيقي:

لدينا G موجودة ووحيدة لما: $\alpha - 2\alpha + \alpha - 1 \neq 0$

$$\alpha - 2\alpha + \alpha - 1 \neq 0 \Longrightarrow -1 \neq 0$$

وعليه G موجودة ووحيدة من أجل كل $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

❷ تبيين أنّ: $\overrightarrow{AG} = 2\alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\,\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-2\alpha}{-1}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha - 1}{-1}\overrightarrow{AC}$$
$$= \boxed{2\alpha\,\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\,\overrightarrow{AC}}$$

❸ اثبات أنّ النقط A، B و G في استقامية إذا وفقط إذا كان $\alpha = 1$:

بما أنّ ABC مثلث فإنّ النقط A، B و C ليست على إستقامية

ولكي تكون النقط A، B و G على استقامية يجب أن يكون معامل النقطة C معدوم

وعليه:

$$\alpha - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

التمرين الثاني [06 نقاط]

I)

❶ تعيين القيم الممكنة للمتغير X، ثم تعيين قانون احتماله:

$$X(\Omega) = \{(0-10);(10-10);(20-10);(30-10)\}$$

أي: $X(\Omega) = \{-10; 0; 10; 20\}$

x_i	-10	0	10	20
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

❷ حساب $P(X > 0)$:

$$P(X > 0) = P(X = 10) + P(X = 20) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

❸ حساب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

لدينا:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i p_i = -10\frac{4}{9} + 0\frac{3}{9} + 10\frac{1}{9} + 20\frac{1}{9} = \boxed{\frac{-10}{9}}$$

ولدينا:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=4}(x_i)^2 p_i - \left(E(X)\right)^2 = (-10)^2\frac{4}{9} + (0)^2\frac{3}{9} + (10)^2\frac{1}{9} + (20)^2\frac{1}{9} - \left(\frac{-10}{9}\right)^2$$

$$= \frac{400}{9} + 0 + \frac{100}{9} + \frac{400}{9} - \frac{100}{81} = \frac{8000}{81} \approx \boxed{98.76}$$

ومنه:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8000}{81}} = \frac{40\sqrt{5}}{9} \approx \boxed{9.93}$$

II) حساب "القيمة" الذي يجب وضعها في هذه الخانة:

الربح المالي للاعب مساوي لـ 0 معناه $E(X) = 0$

نضع x هو رقم الخانة التي نبحث عن قيمتها

$$E(X) = 0 \Rightarrow -10\frac{4}{9} + 0\frac{3}{9} + 10\frac{1}{9} + (x-10)\frac{1}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{-40}{9} + \frac{10}{9} + \frac{x}{9} - \frac{10}{9} = 0 \Rightarrow \frac{m}{9} = \frac{40}{9} \Rightarrow \boxed{x = 40}$$

التمرين الثالث [09 نقاط]

❶ إيجاد الأعداد c, b, a:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$
$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ -b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

❷

أ/ استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

لدينا:

$$\lim_{|x|\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x|\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{x-1} - (x-1)\right] = \lim_{|x|\to+\infty} \left[\frac{1}{x-1}\right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

ب/ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{1}{x-1}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-1)$:

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

❸ دراسة تغيرات الدالة f:

- **أولا: حساب النهايات:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

التفسير الهندسي: المستقيم $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

- **ثانيا: حساب $f'(x)$:**

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2>0$ ومنه الإشارة من $(x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	||	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	||	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

- **ثالثا: جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

❹ إيجاد إحداثي النقطة ω:

$$\begin{cases} y = x-1 \ldots (1) \\ x = 1 \ldots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y=1-1=0$

ومنه : $\omega(1;0)$

- اثبات أنّ ω مركز تناظر للمنحني (C_f):

أولا نثبت أنّ $(2(1)-x)\in D_f$

لدينا $x\in D_f$ معناه: $x\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

معناه: $x\in\,]1;+\infty[$ أو $x\in\,]-\infty;1[$ معناه: $x>1$ أو $x<1$ معناه: $-x<-1$ أو $-x>-1$

معناه: $2-x<1$ أو $(2-x)>1$ معناه: $(2-x)\in\,]1;+\infty[$ أو $(2-x)\in\,]-\infty;1[$

إذن: $(1-x)\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(1)-x)+f(x)=2(0)$:

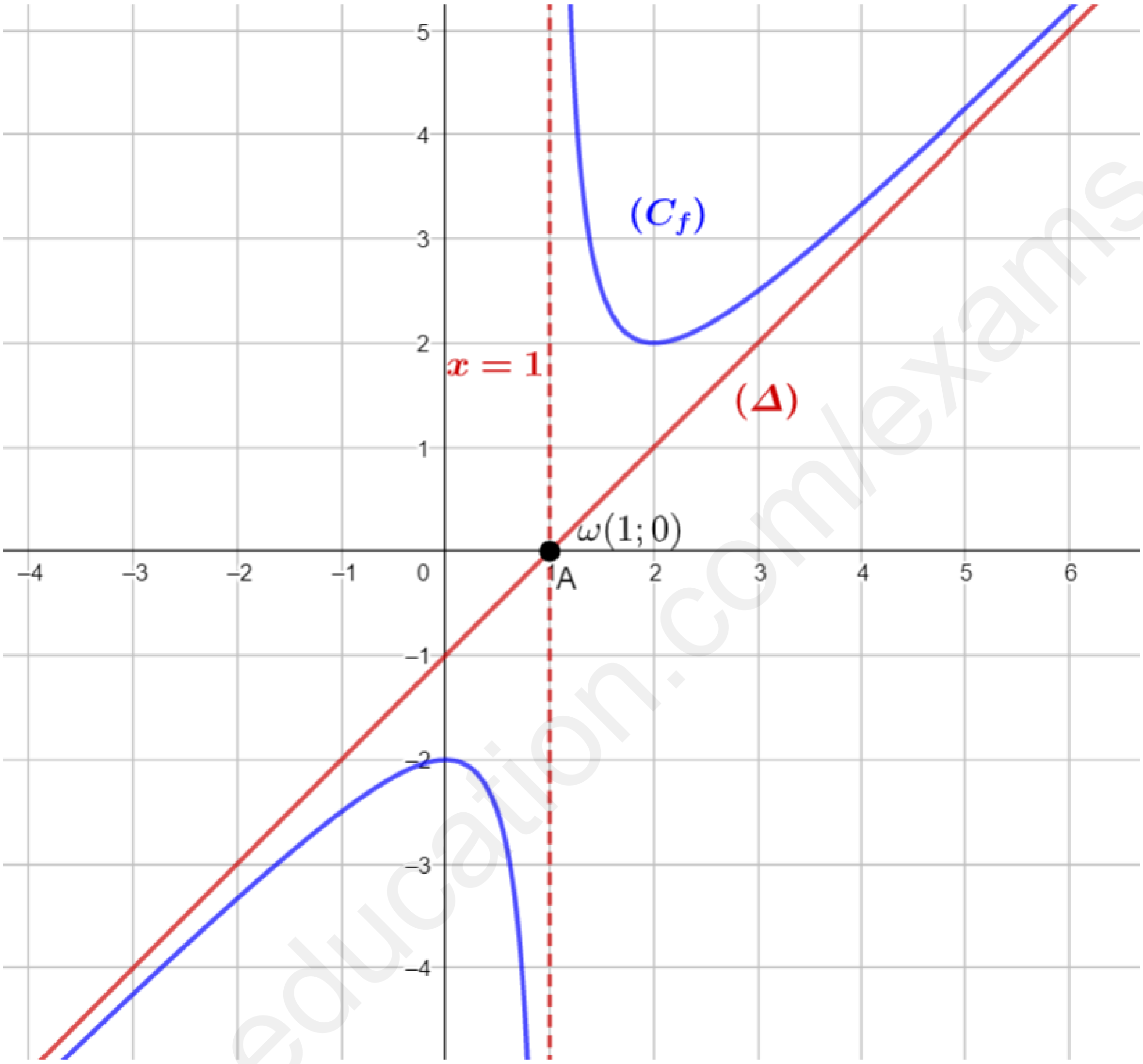
لدينا:

$$f(2-x)+f(x)=2-x-1+\frac{1}{2-x-1}+x-1+\frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{1-x} + \frac{-1}{1-x}$$
$$= 0$$

إذن النقطة $\omega(1;0)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

❺ التمثيل البياني:



❻ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^2 - 2x + 2 = mx - m \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = m(x-1)$$
$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$ وهي:

لما $m < -2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين ومختلفين في الإشارة

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حل مضاعف معدوم

لما $-2 < m < 2$ المعادلة لا تقبل حلولا

لما $m = 2$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماما

لما $m > 2$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما