

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (5 نقاط) :

ليكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ كثير حدود حيث

(1) أحسب $P(3)$ ماذا تستنتج ؟

(2) حلل $P(x)$ الى جداء عوامل من الدرجة الأولى .

(3) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المعادلة ذات المجهول x التالية $P(x) = 0$.

(4) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المتراجحة ذات المجهول x التالية $P(x) \geq 0$ ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2018}{1439}\right)$

التمرين الثاني (6 نقاط) :

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس نعتبر النقط $A(1;3)$ و $B(-3;-1)$ و $C(2;-2)$ و لتكن G مركز ثقل

المثلث ABC و النقطة D معرفة بالعلاقة $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$.

(1) علم النقط A و B و C .

(2) عين احداثيات النقطتان G و D .

(3) بين ان الرباعي متوازي أضلاع $ABCD$.

(4) بين أن النقط B و G و D في إستقامة .

(5) لتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$

عين ثم أنشئ المجموعة E

(6) لتكن F مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3\|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

عين ثم أنشئ المجموعة F .

التمرين الثالث (5 نقاط) :

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = \frac{-x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ حيث a, b عدنان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد متجانس .

عين العدان a , b علماً أن (C_f) يقبل في النقطة $A(1; -3)$ مماساً معامل توجيهه يساوي -1 .

الجزء الثاني : نضع $a = -6$, $b = 1$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(2) عين حصر للدالة f على المجال $[0;1]$

(3) عين القيم الحدية المحلية للدالة f (تُدور النتائج الى 10^{-2})

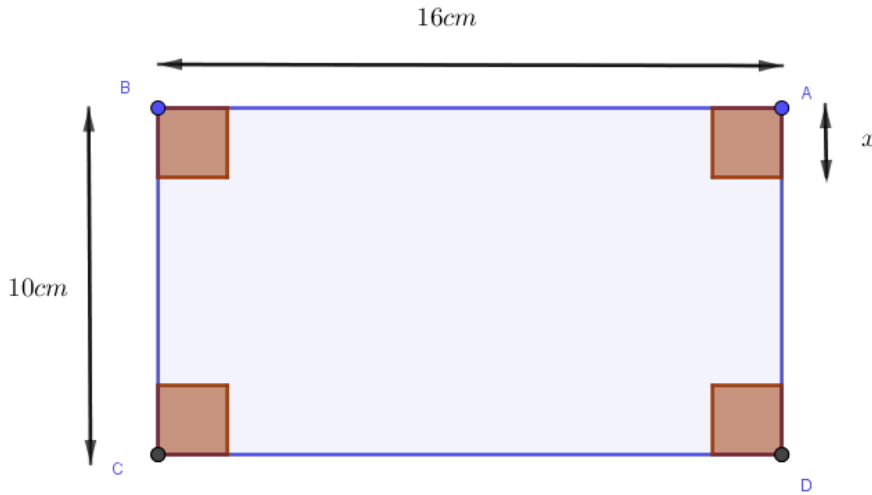
(4) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

التمرين الرابع (4 نقاط)

انطلاقاً من مستطيل بعده 16 ; 10 بالسنتيمترات نضع علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم بالكيفية التالية :

من كل ركن من أركان المستطيل نقطع مربعاً طول ضلعه يساوي x ثم نرفع الجوانب بالطي كما هو موضح في الرسم.

حدد قيمة x ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن



مع تمنيات الاستاذ : جواليل أحمد - بالتوفيق و النجاح

ليكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ كثير حدود حيث

(1) حساب $P(3)$ بالتعويض نجد $P(3) = 3^3 - 4(3^2) + 3 + 6 = 27 - 36 + 9 = 0$ ومنه 3 جذر لـ $P(x)$

(2) تحليل $P(x)$ الى جداء عوامل من الدرجة الأولى بطريقة هورنر نشكل الجدول التالي

| | | | | |
|---|---|-----|----|-----|
| | 1 | - 4 | 1 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | -3 | - 6 |
| | 1 | - 1 | -2 | 0 |

و منه نجد

$P(x) = (x-3)(x+1)(x-2)$ و $(x^2 - x - 2) = (x+1)(x-2)$ و $P(x) = (x-3)(x^2 - x - 2)$

(3) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المعادلة ذات المجهول x التالية $P(x) = 0$ يكافئ $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$ يكافئ

$(x-3) = 0$ او $(x+1) = 0$ او $(x-2) = 0$ أي ان $x = 3$ او $x = -1$ او $x = 2$ ومنه مجموعة الحلول

$$S = \{-1; 2; 3\}$$

(4) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية R المتراجحة ذات المجهول x التالية $P(x) \geq 0$ ندرس اشارة $P(x)$

| | | | | | |
|--------------------|-----------|----|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| اشارة $(x-3)$ | - | 0 | - | 0 | + |
| اشارة $(x+1)(x-2)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| اشارة $P(x)$ | - | 0 | + | 0 | + |

من الجدول نستنتج حلول المتراجحة هي $S' = [-1; 2] \cup [3; +\infty[$

بما أن $\left(\frac{2018}{1439}\right) = 1.4$ أي ان $1 \leq \left(\frac{2018}{1439}\right) \leq 2$ فإن $P\left(\frac{2018}{1439}\right) \geq 0$

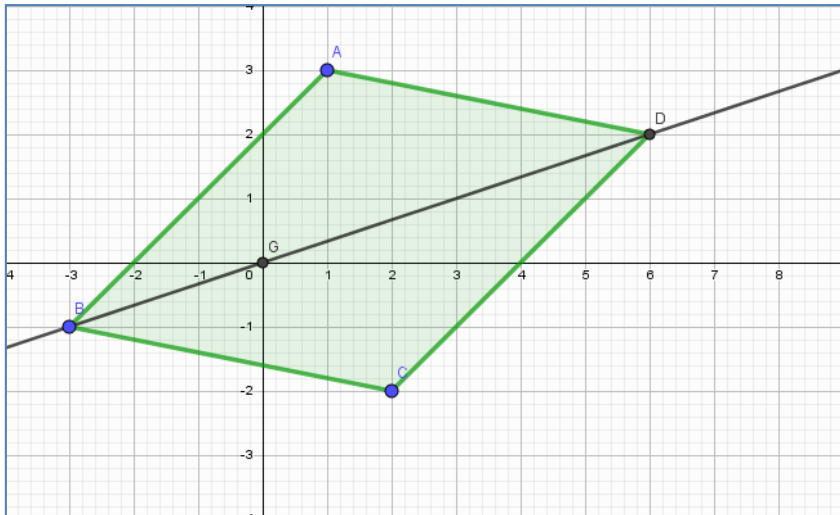
أي ان العدد $P\left(\frac{2018}{1439}\right)$ عدد موجب .

التمرين الثاني(6 نقاط) :

(1) تعليم النقط A و B و C

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

(2) تعيين احداثيات النقطتان



$$G(0;0) \text{ و منه } \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x_G = \frac{1-3+2}{3} \\ y_G = \frac{3-1-2}{3} \end{cases} \text{ أي ان}$$

لدينا $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ يعني ان D مرجح الجملة $\{(C;1), (B;-1), (A;1)\}$ و منه

$$D(6;2) \text{ و منه } \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 2 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x_D = 1+3+2 \\ y_D = 3+1-2 \end{cases} \text{ أي ان } \begin{cases} x_D = \frac{x_A - x_B + x_C}{1-1+1} \\ y_D = \frac{y_A - y_B + y_C}{1-1+1} \end{cases}$$

(3) تبين ان الرباعي متوازي أضلاع $ABCD$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-4;-4)$ و $\overrightarrow{DC}(-4;-4)$ أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فالرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع

(4) تبين أن النقط B و G و D في إستقامة: لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

لدينا G مركز ثقل المثلث ABC أي G مرجح الجملة $\{(B;1), (H;2)\}$ حيث و منه G تنتمي الى المستقيم

$$(1) \dots\dots\dots (BH)$$

يعني ان D مرجح الجملة $\{(B;-1), (H;2)\}$ و منه D تنتمي الى المستقيم

$$(2) \dots\dots\dots (BH)$$

من (1) و (2) نستنتج أن B و G و D في استقامة .

(5) لتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ تعني أن

$3MG = 3MD$ و منه $MG = MD$ و منه E هي

محور القطعة المستقيمة $[GH]$

إنشاء المجموعة E في الشكل المقابل

(6) لتكن F مجموعة النقط M من المستوي حيث

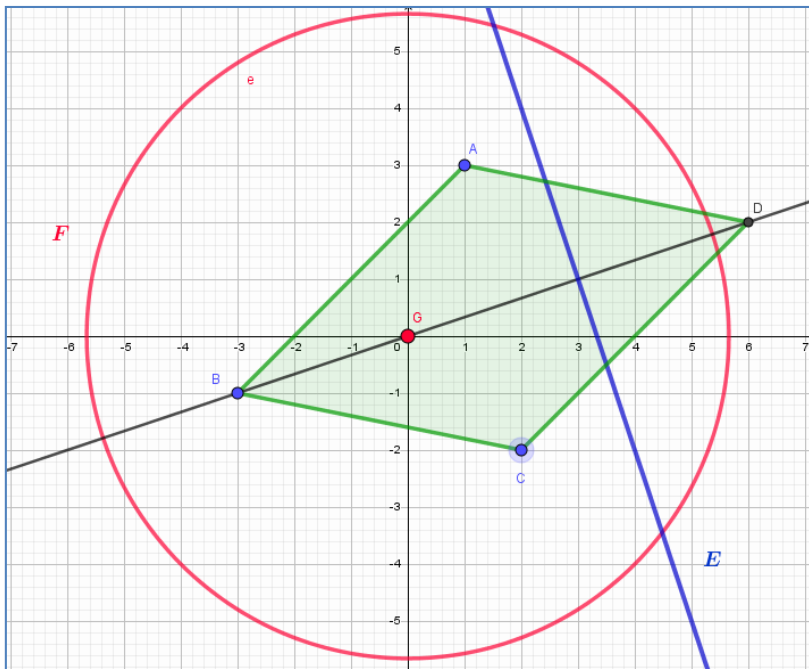
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$$

يعني ان $3MG = 3\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\|$ أي ان

$3MG = 3BA$ و منه $MG = BA$ أي ان F هي

دائرة نصف قطرها $[BA]$ و مركزها G

انشاء المجموعة F في الشكل المقابل



تعيين العددين a, b علماً أن (C_f) يقبل في النقطة $A(1; -3)$ مماساً معامل توجيهه يساوي -1 . لدينا

$$\bullet f(1) = -3 \text{ يعني ان } \frac{-1+a+b}{2} = -3 \text{ أي ان } (1) \dots\dots\dots a+b = -5$$

$$\bullet \text{ و } f'(1) = -1 \text{ لدينا و } f'(x) = \frac{(-2x+a)(x^2+1) - 2x(-x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{و منه } -2-2b = -4 \text{ و } \frac{-a+(-2-2b)+a}{4} = -1 \text{ بالتعويض نجد } f'(x) = \frac{-ax^2 + (-2-2b)x + a}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{أي ان } b=1 \text{ بالتعويض في (1) نجد أن } a = -6$$

الجزء الثاني :

$$(1) \text{ دراسة اتجاه تغير الدالة } f : \text{ مما سبق لدينا } f'(x) = \frac{-ax^2 + (-2-2b)x + a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 4x - 6}{(x^2+1)^2} \text{ اشارتها من اشارة البسط } 6x^2 - 4x - 6 \text{ نحسب المميز } \Delta = 160 \text{ و منه لـ}$$

$$\left[-\infty; \frac{1-\sqrt{10}}{3} \right] \text{ و منه } f' \text{ موجبة على المجالين } \begin{cases} x' = \frac{4+4\sqrt{10}}{12} = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ x'' = \frac{4-4\sqrt{10}}{12} = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \end{cases} \text{ جذرين هما } 6x^2 - 4x - 6$$

$$\left[\frac{1-\sqrt{10}}{3}; \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right] \text{ و } f' \text{ سالبة على المجال } \left[\frac{1+\sqrt{10}}{3}; +\infty \right]$$

$$\text{و منه } f \text{ متزايدة على هذين المجالين } \left[\frac{1+\sqrt{10}}{3}; +\infty \right] \text{ و } \left[-\infty; \frac{1-\sqrt{10}}{3} \right]$$

$$\text{و } f \text{ متناقصة على هذا المجال } \left[\frac{1-\sqrt{10}}{3}; \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right]$$

$$(2) \text{ تعيين حصر للدالة } f \text{ على المجال } [0;1] \text{ الدالة } f \text{ متناقصة تماما على هذا المجال و منه } f(1) \leq f(x) \leq f(0) \text{ أي ان } -3 \leq f(x) \leq 1$$

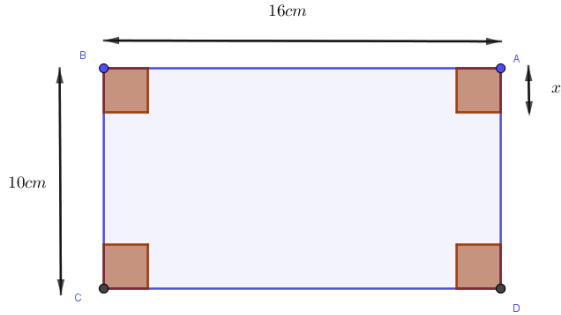
$$(3) \text{ تعيين القيم الحدية المحلية للدالة } f \text{ هي } f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = 3.16 \text{ قيمة حدية محلية كبرى و } f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = -3.16$$

قيمة حدية محلية صغرى .

4) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = f'(0)x + f(0)$ بما ان

$$y = 6x + 1 \quad \text{فإن} \quad f'(0) = 6, \quad f(0) = 1$$

التمرين الرابع (4 نقاط)



بعد عملية الطي و القص نحصل على علبة ارتفاعها هو x عرضها هو $10 - 2x$ و طولها هو $16 - 2x$ إذن بما انها أطوال يعني ان x ينتمي للمجال $[0; 5]$ و حجم العلبة

$$v(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x) \quad \text{هو}$$

$$v(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x \quad \text{و منه} \quad v(x) = x(160 - 52x + 4x^2) \quad \text{أي ان}$$

ندرس تغيرات الدالة v على المجال $[0; 5]$

$$v'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{104 + 56}{24} = \frac{160}{24} = \frac{20}{3} \\ x'' = \frac{104 - 56}{24} = 2 \end{array} \right. \quad \text{نحسب المميز} \quad \Delta = 3136 \quad \text{لـ} \quad v'(x) \quad \text{جذرين هما}$$

الاول $\frac{20}{3}$ خارج مجموعة التعريف

و الثاني 2 داخلها مقبول

و منه الدالة v متزايدة على المجال $[0; 2]$ و متناقصة على

المجال $[2; 5]$ أي ان $v(2) = 144 \text{ cm}^3$ قيمة حدية كبرى

القيمة المطلوبة هي $x = 2$

| | | | |
|---------|---|-----|---|
| x | 0 | 2 | 5 |
| $v'(x)$ | | + | - |
| $v(x)$ | 0 | 144 | 0 |