مديرية التربية لولاية ميلة	متقن علي جعفر - تاجنانت

《إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات》

2016/02/29

الأقسام: 2 علوم تجريبية — **المدة: ساعتان**

التمرين الأول: (8 نقاط)

I) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r بحيث : $\begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$

1) عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$

II) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1 \end{cases}$

1) احسب : v_1, v_2 .

2) نعتبر المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $w_n = v_n + 2$.

أ- برهن أن (w_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n .

ت أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = w_o + w_1 + w_2 + ... + w_n$

ث استنتج عبارة S'_n بدلالة n حيث : $S'_n = v_o + v_1 + v_2 + ... + v_n$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$ بالشكل : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أنه مهما يكن $x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$: $f(x) = 1 + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-3}$ حيث c, b عددان حقيقيان ثابتان يطلب تعيينهما.

2) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلاتها.

4) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) بين أنه مهما يكن $x \in D_f$ و $2 - x \in D_f$ فإن : $f(2-x) = f(x)$

6) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 2.

7) أنشئ (C_f) و (D).

8) عين بيانيا **عدد و إشارة** حلول المعادلة : $f(x) = 6$.

أستاذ المادة: يوسفي كمال	www.youcefimaths.com

الحل النموذجي للاختبار الأول

التمرين الأول:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية بحيث،

$$\begin{cases} U_1 - U_4 = -6 \\ U_1 + U_5 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_0 + r - (U_0 + 4r) = -6 \\ U_0 + r + U_0 + 5r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3r = -6 \\ 2U_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \quad 0,5 \\ U_0 = 8 \quad 0,5 \end{cases}$$

كتابة عبارة الحد العام

$U_n = U_0 + nr$

$U_n = 8 + 2n$ 1

3) حساب المجموع

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

$= \frac{n+1}{2}(8 + 8 + 2n)$

$S_n = (n+1)(8+n)$ 1

II

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n - 1 \end{cases}$$

$v_1 = \frac{1}{2} v_0 - 1 = 2$ 0,5

$v_2 = \frac{1}{2} v_1 - 1 = 0$.

2) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ

$w_n = v_n + 2$

أ) برهان ان (w_n) هي متتالية هندسية

$w_{n+1} = v_{n+1} + 2$

$= \frac{1}{2} v_n - 1 + 2$

$= \frac{1}{2} v_n + 1$ 1

$= \frac{1}{2}(v_n + 2) = \frac{1}{2} w_n$

ومنه (w_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

0,5 $w_0 = v_0 + 2 = 8$.

ب/ عبارة الحد العام w_n.

$w_n = w_0 \cdot q^n$

$= 8 \times (1/2)^n$ 0,5

استنتاج عبارة v_n

$v_n = w_n - 2$

$v_n = 8(1/2)^n - 2$ 0,5

ت) حساب المجموع S_n.

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

$= w_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 8 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}$

$S_n = 16\left(1 - (1/2)^{n+1}\right)$. 1

ث: استنتاج عبارة

$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= (w_0 - 2) + (w_1 - 2) + \dots + (w_n - 2)$

$= w_0 + w_1 + \dots + w_n - 2(n+1)$

$= 16\left(1 - (1/2)^{n+1}\right) - 2(n+1)$. 1

التمرين الثاني:

$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

1/ برهان انه مهما كان $x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$.

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-3)+b(x-3)+c(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\frac{x^2+x-3x-3+bx-3b+cx+c}{(x^2-2x-3)}$$
$$=\frac{x^2+(b+c-2)x+c-3b-3}{(x^2-2x-3)}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} b+c-2=-2 \\ c-3b-3=-15 \end{cases} \qquad \begin{cases} b+c=0 \\ c-3b=-12 \end{cases}$$

وبحل الجملة نجد:

$b=3$ و $c=-3$ (1)

ومنه $f(x)=1+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-3}$

2) دراسة تغيرات الدالة f.

$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,3[\cup]3,+\infty[$.

النهايات: (1,5)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim \frac{x^2}{x^2}=1$ 0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim \frac{x^2}{x^2}=1$ 0,25

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=-\infty$ 0,25 (-12, 0^+)

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$ 0,25

x		-1		3	
x^2-2x-3	+	0	−	0	+

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=\lim \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=+\infty$ (-12, 0^-)

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=-\infty$ 0,25

المشتق:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$$
$$=\frac{(2x-2)(12)}{(x^2-2x-3)^2}=\boxed{\frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}} \quad (1)$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $24x-24$ على D.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
		−	‖	−	0	+	‖	+	

(0,5)

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	+	‖	+	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

(1)

3) المستقيمات المقاربة.

لدينا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $\pm\infty$ (0,5)

لدينا: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$ (0,5)

لدينا: $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\pm\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$ (0,5)

4) التقاطع مع المحاور.

أ) مع محور الفواصل: معناه $f(x)=0$

$x^2-2x-15=0$

$\Delta=64$, $x_1=-3$, $x_2=5$

ومنه $(C)\cap(xx')=\{A(-3,0), B(5,0)\}$ (0,5)

ب) مع محور التراتيب

$f(0)=5$ ومنه $(C)\cap(yy')=\{C(0,5)\}$ (0,5)

5) برهان ان: من اجل كل $x\in D_f$ ، $2-x\in D_f$

$f(2-x)=f(x)$.

لدينا: $f(x)=1+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-3}$

$$f(2-x)=1+\frac{3}{2-x+1}-\frac{3}{2-x-3}$$
$$=1+\frac{3}{-x+3}-\frac{3}{-x-1}$$
$$=1-\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x+1}=f(x) \quad (1)$$

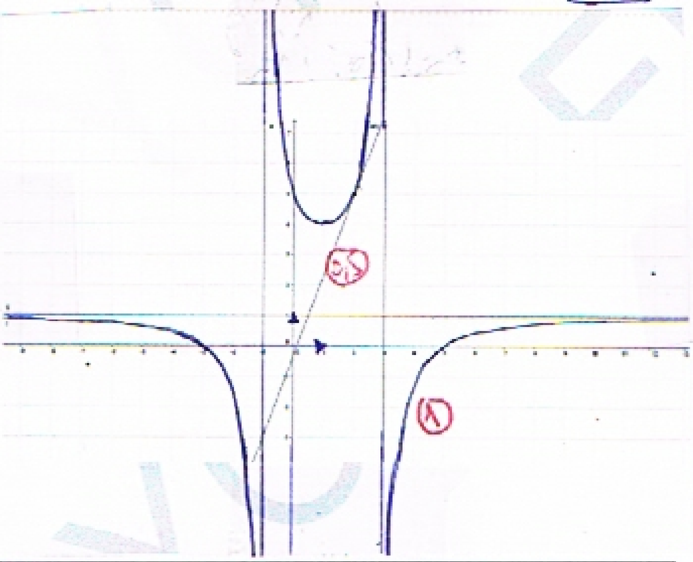
* نستنتج بيانيا ان منحنى الدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x=1$

6) كتابة معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2.

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=\frac{8}{3}(x-2)+5$ $\qquad$ $y=\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$ (1)

7) المنحنى.



8) التفسير البياني لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=6$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم $y=6$. 0.5

إذن: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

0.5