<u>اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات ( الأستاذ: مراحي لزهر )</u>

## التمرين الأول:

I) لتكن $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ ثلاثة أعداد حقيقية و لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-1}$

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

عين الأعداد الحقيقية $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ إذا علمت أن $(C_f)$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل $(xx')$ في النقطة $A(0;2)$

و أنه يقبل مماسا يوازي المستقيم الذي معادلته: $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$ عند النقطة التي فاصلتها $-1$

II) نفرض أنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$

1) تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان: $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x-1}$
2) بين أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(d)$ موازيا لمحور التراتيب يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.
3) بين أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ في جوار $-\infty$ و في جوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.
4) تحقق أن النقطة $\omega$ حيث: $\{\omega\}=(d)\cap(\Delta)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$
5) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها و استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و جدول تغيراتها.
6) أثبت أن $(C_f)$ يقبل مماسين متوازيين معامل توجيه كل منهما يساوي $-\dfrac{3}{4}$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية لكل منهما.
7) عين $(C_f)\cap(yy')$ و $(C_f)\cap(xx')$
8) أنشئ كلا من المستقيمين المقاربين $(d)$ و $(\Delta)$ ثم أرسم المنحنى $(C_f)$
9) ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=m$

## التمرين الثاني:

المستوي مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ . الوحدة: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

I) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{4}{7}u_n+\dfrac{3}{7}$

1) أحسب الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ثم مثلها **بدقة** على محور الفواصل .
2) ما هو التخمين الذي تقترحه حول اتجاه تغير هذه المتتالية ؟

3) أحسب الفرق: $u_{n+1}-u_n$

4) إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>1$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ .

II) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_n-1$

أ) بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

ت) أحسب المجموع: $s_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ ثم استنتج المجموع: $t_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

ث) أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n+5^n}{4^n-5^n}\right)$

## التمرين الثالث:

فيما يلي نعتبر المستوي موجها و $k$ عدد صحيح نسبي.

i) $ABC$ مثلث متقايس الأضلاع حيث: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

النقاط $I$ ، $J$ و $K$ هي منتصفات الأضلاع $[BC]$ ، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

**عين القيس الرئيسي** لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية: $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{JK}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{CA}\right)$

ii) $DEF$ مثلث متساوي الساقين رأسه $F$. يعطى: $\left(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$H$ نقطة من القطعة $[DF]$ حيث: $\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{ED}\right)=\frac{\pi}{4}+2\pi k$

بتوظيف **علاقة شال** للزوايا الموجهة و **خواص** الزوايا الموجهة، عين **القيس الرئيسي** لكل زاوية من الزاويتين الموجهتين:

$\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{FD}\right)$ و $\left(\overrightarrow{HE},\overrightarrow{EF}\right)$

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية لموضوع **اختبار الثلاثي الثاني** السنة الدراسية: **2017/2016**

مادة: **الرياضيات** الشعبة: **الثانية علوم تجريبية** المدة: **(03) ثلاث ساعات** _ **الأستاذ: مراحي لزهر**

| عناصر الإجابة | العلامة: مجزأة | العلامة: مجموع |
|---|---|---|
| **<u>التمرين الأول: ( 10 نقطة )</u>**<br>$I$) تعيين العددين الحقيقيين $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ حتى يقبل $\left(C_f\right)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل $\left(xx'\right)$ في النقطة $A(0;2)$ و يقبل مماسا يوازي المستقيم الذي معادلته: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ عند النقطة التي فاصلتها $-1$<br>من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x)=\frac{\alpha x^2-2\alpha x-\beta-\gamma}{(x-1)^2}$<br>لدينا: $\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=0 \\ f'(-1)=-\frac{3}{4} \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} \frac{\gamma}{-1}=2 \\ -\beta-\gamma=0 \\ 3\alpha-\beta-\gamma=-3 \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \\ \gamma=-2 \end{cases}$ | 0.5 | |
| $II$) نفرض أنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان : $f(x)=\frac{-x^2+2x-2}{x-1}$<br>1) التحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان: $f(x)=-x+1-\frac{1}{x-1}$<br>من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:<br>$-x+1-\frac{1}{x-1}=\frac{(-x+1)(x-1)-1}{x-1}=\frac{-x^2+x+x-1-1}{x-1}=\frac{-x^2+2x-2}{x-1}=f(x)$ | 0.5 | |
| 2) بيان أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا $(d)$ موازيا لمحور التراتيب يطلب كتابة معادلة له:<br>لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ و منه $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $(d):x=1$ | 01 | 10 |
| 3) بيان أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ في جوار $-\infty$ و في جوار $+\infty$ :<br>لدينا: $f(x)=-x+1-\frac{1}{x-1}$ و منه: $f(x)-(-x+1)=-\frac{1}{x-1}$ ، إذن:<br>$\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\left[-\frac{1}{x-1}\right]=0$<br>و منه $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $(\Delta):y=-x+1$ في جوار $-\infty$ و في جوار $+\infty$ | 01 | |
| 4) التحقق أن النقطة $\omega$ $\{\omega\}=(d)\cap(\Delta)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$<br>لدينا $\omega(1;-1+1)$ و منه: $\omega(1;0)$ يكفي إذن إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فان:<br>$f\left[2(1)-x\right]=2(0)-f(x)$ لدينا: $f(2-x)=-f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ | 0.5 | |
| 5) حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها و استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ و جدول تغيراتها: | | |

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x}{(x-1)^2}=\dfrac{-x(x-2)}{(x-1)^2}$ ومنه: 01

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

و بالتالي جدول التغيرات يكون كما يلي: 01

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty \| -\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

6) إثبات أن $(C_f)$ يقبل مماسين متوازيين معامل توجيه كل منهما يساوي $-\dfrac{3}{4}$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية لكل منهما:

$f'(x)=\dfrac{-x^2+2x}{(x-1)^2}=-\dfrac{3}{4}$ معناه: $4(-x^2+2x)=-3(x-1)^2$ ومنه: $-x^2+2x+3=0$ أي: 01

$x=-1$ أو $x=3$ إذن:

$(T_1): y=f'(3)\times(x-3)+f(3)$ أي: $(T_1): y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ 0.5

$(T_2): y=f'(-1)\times(x+1)+f(-1)$ أي: $(T_2): y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$ 0.5

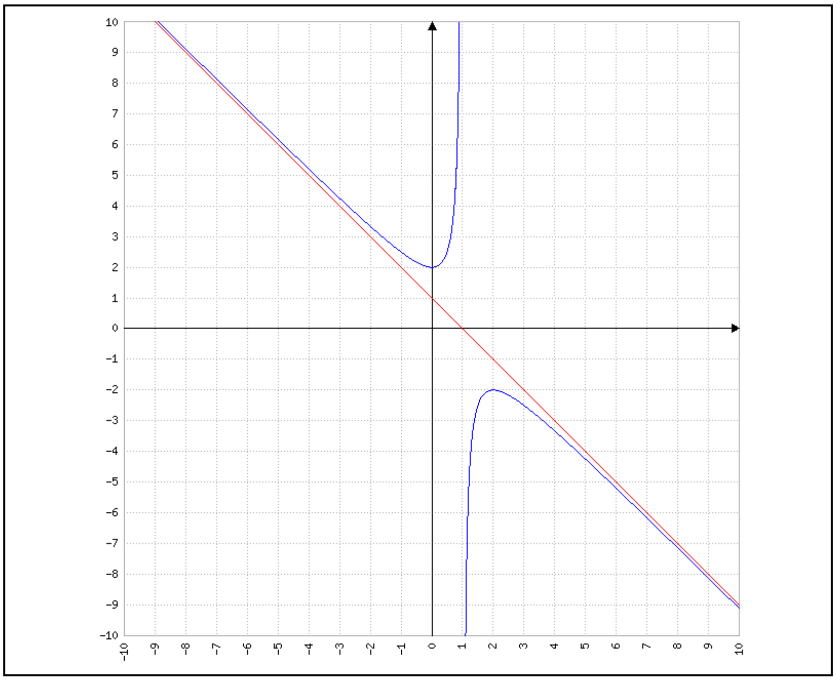
7) تعيين $(C_f)\cap(xx')$ و $(C_f)\cap(yy')$ ثم رسم المنحنى $(C_f)$

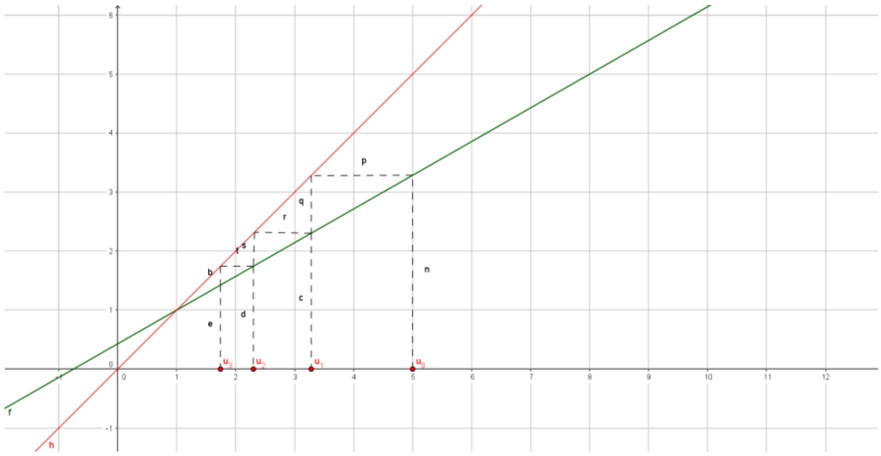
لدينا: $f(0)=2$ و منه: $(C_f)\cap(yy')=\{B(0;2)\}$ 0.5

من جهة أخرى: المعادلة $f(x)=0$ تكافئ المعادلة: $\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}=0$ أي: $-x^2+2x-2=0$

هذه الأخيرة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}-\{1\}$ لأن $\Delta<0$ و بالتالي: $(C_f)\cap(xx')=\varnothing$ 0.5

8) رسم المنحنى: 0.5



| | | |
|---|---|---|
| | 01 | 9) المناقشة البيانية حسب قيم العدد الحقيقي $m$ لعدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=m$<br>إذا كان $m\in]-\infty;-2[$ فان المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .<br>إذا كان $m=-2$ فان المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا تماما .<br>إذا كان $m\in]-2;2[$ فان المعادلة لا تقبل حلولا .<br>إذا كان $m=2$ فان المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.<br>إذا كان $m\in]2;+\infty[$ فان المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة. |
| | 01 | **<u>التمرين الثاني: ( 07 نقطة )</u>**<br>$I)$ $(u_n)_{n\geq 0}$ هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}$<br>1) حساب الحدود $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ و تمثيلها بدقة: $u_1=\frac{23}{7}$ ، $u_2=\frac{113}{49}$ ، $u_3=\frac{599}{343}$ |
| | 01 |  |
| | 0.25 | 2) تخمين اتجاه التغير : من خلال الرسم نلاحظ أن المتتالية تبدو متناقصة تماما. |
| | 01 | 3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}\right)-u_n=-\frac{3}{7}u_n+\frac{3}{7}$ |
| 07 | 0.25 | 4) و لكن: $u_n>1$ ومنه $-\frac{3}{7}u_n<-\frac{3}{7}$ و منه: $-\frac{3}{7}u_n+\frac{3}{7}<-\frac{3}{7}+\frac{3}{7}$ و منه: $u_{n+1}-u_n<0$<br>ومنه المتتالية: $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$<br>$II)$ لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_n-1$<br>أ) بيان أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول: |
| | 0.5 | لدينا: $v_n=u_n-1$ و منه: $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\left(\frac{4}{7}u_n+\frac{3}{7}\right)-1=\frac{4}{7}u_n-\frac{4}{7}=\frac{4}{7}(u_n-1)=\frac{4}{7}v_n$ |
| | 0.25 | إذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها: $q=\frac{4}{7}$ و حدها الأول: $v_0=u_0-1=5-1=4$<br>ب) كتابة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 01 | من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_n = v_0 \times q^{n-0} = 4\times\left(\frac{4}{7}\right)^n$ و منه: $u_n = v_n + 1 = 4\times\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1$ |
| | | ت) حساب المجموع: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ ثم استنتج المجموع: $t_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ |
| | 0.25 | $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q} = 4\times\frac{1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{28}{3}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}\right]$ |
| | | $t_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (v_0+1)+(v_1+1)+(v_2+1)+\ldots+(v_n+1)$ |
| | 0.25 | و منه: $t_n = (v_0+v_1+v_2+\ldots.+v_n)+(1+1+1\ldots+1) = s_n + n + 1 = \frac{28}{3}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}\right]+n+1$ |
| | | ث) حساب النهايات التالية: |
| | 0.25 | $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(4\times\left(\frac{4}{7}\right)^n\right) = 4\times 0 = 0$ |
| | 0.25 | $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(4\times\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1\right) = 4\times 0 + 1 = 1$ |
| | 0.25 | $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{28}{3}\left[1-\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}\right]\right) = \frac{28}{3}[1-0] = \frac{28}{3}$ |
| | 0.25 | $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n) = +\infty$ |
| | 0.25 | $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n+5^n}{4^n-5^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5^n\left(\left(\frac{4^n}{5^n}\right)+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{4^n}{5^n}\right)-1\right)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}\right) = \frac{0+1}{0-1} = -1$ |
| | | **<u>التمرين الثالث: ( 03 نقاط )</u>** |
| | | i) $ABC$ مثلث متقايس الأضلاع حيث: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}+2\pi k$ |
| | 01.5 | $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ و هو القيس الرئيسي، $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{JK}\right) = \pi$ و هو القيس الرئيسي |
| | | $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{CA}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ و منه القيس الرئيسي هو $-\frac{5\pi}{6}$ |
| 03 | | ii) $DEF$ مثلث متساوي الساقين رأسه $F$ . يعطى: $\left(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}\right) = \frac{\pi}{6}+2\pi k$ |
| | | $\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{FD}\right) = \left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{FD}\right) = \frac{\pi}{4}+\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$ |
| | 01.5 | |
| | | $\left(\overrightarrow{HE},\overrightarrow{EF}\right) = \left(\overrightarrow{HE},\overrightarrow{EH}\right)+\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$ |
| | | انتهى نص الإجابة بعون الله ... |