الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — دورة ماي 2014

ثانوية العقيد لطفي –بوقدير– الشعبة :رياضيات + تقني رياضي — المدة : 04 سا و 30 د

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

عالج أحد الموضوعين على الخيار

ـــــ الموضوع الأول ـــــ

التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن النقط A ; B ; C ;D ;H التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_A = a \quad ; \quad Z_B = 1+\frac{a-1}{a}i \quad ; \quad Z_C = i\,a \quad ; \quad Z_D = -\frac{1}{a}i \quad ; \quad Z_H = 1+Z_D$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

1) أ- تحقق أن : $Z_B - Z_D = \overline{Z_D}\left(Z_A - Z_C\right)$

ب- استنتج أن المستقيمين (AC) وَ (BD) متعامدان.

2) أ- عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B وَ يحول C إلى D .

ب- حدد Z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ،ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل.

جـ - بين أن المثلثين OAC وَ BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

3) لتكن (M_n)متتالية نقط من المستوي معرفة كما يلي : $M_0 = A$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$

حيث Z_n لاحقة النقطة M_n ونضع : $U_n = |Z_n - Z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- عين قيم a بحيث تكون (U_n)متتالية متقاربة .

جـ - نرمز بـ T_n إلى مجموع أطوال القطع المستقيمة $[M_{n+1}\Omega]$, $[M_n\Omega]$,....., $[A\Omega]$

* احسب المجموع T_n بدلالة n .

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z = a\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

* حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني :

I) عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة : $2014\alpha = 475\beta + m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x - 475y = -19$ ..... (1)

1. عين الحل الخاص $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0 - 4x_0 = 1$

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

3. بين أن العددين x وَ y أوليان فيما بينهما باعتبار الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة(1).

4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n \equiv 4[25]$ وَ باقي قسمة n على العدد 106 هو 17 .

5. عين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة(1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10.

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط :

نعتبر النقط : $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ وَ المستوي (P) المعرف بتمثيل وسيطي له كما يلي : $\begin{cases} x=-3\alpha+\beta \\ y=2\alpha-\beta \\ z=\alpha+3 \end{cases}$; $\alpha\in IR$, $\beta\in IR$

1. بين أن المثلث ABC قائم .
2. بين أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) و يشمل النقطة A .
3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A و العمودي على المستقيم (AC).
4. عين تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) وَ (Q) .
5. لتكن النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).
6. احسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$
7. ا) بين أن $\frac{\pi}{4}$ قيس بالراديان للزاوية الهندسية $B\widehat{D}C$

ب) احسب مساحة المثلث BDC ، ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC).

التمرين الرابع:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1 & ; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعا مد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. — وحدة الطول $2cm$ —

I) 1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .
3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
4. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha\geq 0$ وَ $f(\alpha)=0$ ، ثم تحقق أن : $4.6<\alpha<4.7$
5. اكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحني عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

1. احسب $g'(x)$ وَ $g''(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$.
2. حدد إتجاه تغيرات الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).
3. أنشئ (D) وَ (C_f).

III) 1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,dx$

* احسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المماس (D) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x=\frac{1}{n}$ وَ $x=1$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$

ـــــ الموضوع الثاني ـــــ

التمرين الأول :

1)عين قيم العددين الحقيقيين x وَ y بحيث : $x^2e^{2iy}+4=0$ وَ $x>0$ ثم تحقق أن العدد المركب $-2i$ يحقق هذه المساواة

2) نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-2i$ العدد المركب Z' حيث : $Z'=\dfrac{Z-2i}{Z+2i}$

لتكن النقط A ; B ; M ; M' صور الأعداد المركبة $2i$; $-2i$; Z ; Z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نضع : $Z=-2i+re^{i\theta}$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ وَ $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) بين أن : $Z'-1=\dfrac{4}{r}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

ب) استنتج مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' عددا حقيقيا.

جـ) بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و نصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تحديد عناصرها المميزة .

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و زاويته α .

أ) عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1

ب) عين على الرسم النقط : A ; B ; I

جـ) تحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم ارسم شكلا في نفس المعلم السابق .

التمرين الثاني :

(x_n) وَ (y_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}x_0=3\\x_{n+1}=2x_n-1\end{cases}$ وَ $\begin{cases}y_0=1\\y_{n+1}=2y_n+3\end{cases}$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n=2^{n+1}+1$

2) احسب كل من : $p\gcd(x_8\ ;x_9)$ وَ $p\gcd(x_{2014}\ ;x_{2013})$. ماذا تستنتج؟

3) بين أن كل حدين متتابعين من حدود المتتالية (x_n) أوليان فيما بينهما.

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2x_n-y_n=5$ ، ثم استنتج عبارة y_n بدلالة n .

ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي p بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5 .

جـ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $d_n=p\gcd(x_n\ ;y_n)$.

* عين القيم الممكنة للعدد d_n، ثم استنتج قيم n التي يكون من أجلها العددان x_n وَ y_n أوليان فيما بينهما .

التمرين الثالث :

A ; B ; C ; O أربع نقط من الفضاء و G نقطة تحقق : $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

1) عين طبيعة المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=0$

2) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستويات (π_m) المعرفة بالمعادلة :

$(2-m)x+y+mz+6m-6=0$ حيث m وسيط حقيقي

أ) بين أن كل المستويات (π_m) تشمل مستقيما ثابتا (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له .

ب) اكتب معادلة لسطح الكرة التي مركزها $\Omega(2\,;\,1\,;\,2)$ و نصف قطرها 3

جـ) عين قيم العدد الحقيقي m بحيث يكون المستوي (π_m) مماسا لسطح الكرة (S) .

د) هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\overrightarrow{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ عمودي على (π_m)؟ برر.

التمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty\,;\,1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعا مد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

الجزء الأول :

1. أ) بوضع : $t=\dfrac{2}{x-1}$ ، تحقق أن : $\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=\dfrac{e}{2}t^2e^t$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{<\\x\to 1}}f(x)$ وَ فسر النتيجة هندسيا

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;\,1[$: $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-1)^4}e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$.

3 . ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4. أنشئ المنحني (C_f).

الجزء الثاني :

1. جد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty\,;\,1[$.

2. ليكن α عدد حقيقي من المجال $]0\,;\,1[$

أ) احسب العدد $I(\alpha)$ حيث : $I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx$

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{<\\\alpha\to 1}}I(\alpha)$.

3. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات المعرفة بالمعادلات :

$y=0$ ، $x=1$ وَ $x=-1$

الجزء الثالث :

1. أ) بين أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلين بالضبط على المجال $]-\infty\,;\,1[$ أحدهما يساوي -1 والآخر β.

ب) جد حصرا للعدد β سعته 0.01 .

2. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(k)$

نتمنى لكم النجاح في امتحان بكالوريا 2014

الإجابة النموذجية لامتحان البكالوريا التجريبية

في مادة الرياضيات – دورة ماي 2014 –

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1) أ) التحقق أن: $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

$z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a} i + \frac{1}{a} i$

$= 1 + \frac{a-1+1}{a} i = 1+i$

$\overline{z_D}(z_A - z_C) = \frac{1}{a} i(a - ai)$

$= i + 1 = 1 + i$

ومنه $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

ب) استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

من السؤال أ) لدينا :

$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a} i$

ومنه:

$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a} i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

لأن $\frac{1}{a} > 0$

وهكذا : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

إذن $(AC) \perp (BD)$

2) أ) تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S :

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل:

$z' = \alpha z + \beta$; $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\beta \in \mathbb{C}$

لدينا:

$S(A) = B$ معناه: $z_B = \alpha z_A + \beta$ ... (1)

$S(C) = D$ معناه: $z_D = \alpha z_C + \beta$ ... (2)

من (1) و (2) وبالطرح نجد:

$z_B - z_D = \alpha(z_A - z_C)$

ومنه

$\alpha = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$

من السؤال 1) أ) نجد $\alpha = \overline{z_D}$

إذن $\boxed{\alpha = \frac{1}{a} i}$

لتعيين العدد المركب β :

لدينا $z_D = \alpha z_C + \beta$ ومنه

$\beta = z_D - \alpha z_C$

$= -\frac{1}{a} i - \frac{1}{a} i(ai)$

نجد $\boxed{\beta = 1 - \frac{1}{a} i}$

الكتابة المركبة لـ S هي:

$\boxed{z' = \frac{1}{a} i z + 1 - \frac{1}{a} i}$

ب) تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S

نعلم أن: $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ومنه $z_\Omega = \frac{1 - \frac{1}{a} i}{1 - \frac{1}{a} i} = 1$

$\boxed{z_\Omega = 1}$

* تحديد العناصر المميزة للتشابه S :

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات الزاوية $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{a}$

(لاحظ أن $\frac{1}{a} > 0$).

جـ) تبيين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان

لدينا: $S(A) = B$ و $S(C) = D$

لنجد لاحقة صورة O بالتحويل S :

لاحقة O هي الصفر (0) ومنه:

$z' = \frac{1}{a} i(0) + 1 - \frac{1}{a} i = 1 - \frac{1}{a} i = z_H$

لأن $z_H = 1 + z_D = 1 - \frac{1}{a} i$

وهكذا $S(O) = H$

إذن صورة المثلث OAC بالتحويل S هو المثلث BHD وبما أن S تشابه مباشر فإن المثلثين متشابهان.

* إيجاد علاقة بين مساحتي المثلثين:

$\mathcal{A}(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \mathcal{A}(OAC)$

$\boxed{\mathcal{A}(BHD) = \frac{\mathcal{A}(OAC)}{a^2}}$

3) أ) نبين أن (U_n) متتالية هندسية:

لدينا: $U_{n+1} = |z_{n+1} - z_\Omega|$

$= \Omega M_{n+1}$

علما أن $M_{n+1} = S(M_n)$ فإن:

$\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \Omega M_n$

ومنه: $U_{n+1} = \frac{1}{a} \Omega M_n$

$= \frac{1}{a} |z_n - z_\Omega| = \frac{1}{a} U_n$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot U_n$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $\boxed{q = \frac{1}{a}}$ وحدها الأول U_0

حيث: $U_0 = |z_0 - z_\Omega| = |z_A - z_\Omega|$

$\boxed{U_0 = |a-1|}$

ب) تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة

(U_n) متقاربة يعني $-1 < q \leq 1$

أي $-1 < \frac{1}{a} \leq 1$

علما أن $\frac{1}{a} > 0$ نتبع أن $0 < \frac{1}{a} \leq 1$

أي $a \geq 1$ وعلما أن $a \neq 1$

فإن $a > 1$

أي $\boxed{a \in]1; +\infty[}$

ج) حساب المجموع T_n بدلالة n:

$T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega + \cdots + M_0\Omega$

لاحظ أن $M_n\Omega = |z_n - z_\Omega| = U_n$

ومنه

$T_n = U_{n+1} + U_n + \cdots + U_0$

(مجموع $(n+2)$ حدا من حدود متتالية هندسية)

إذن: $T_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+2}}{1-q}$

$T_n = |a-1| \times \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{a}}$

$\boxed{T_n = a \times \frac{|a-1|}{a-1} \left[1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right]}$

4) لدينا $z = a(1 + e^{i\theta})$ و $\theta \in \mathbb{R}$

* تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ):

$z = a(1+e^{i\theta})$ يكافئ $z = a + a e^{i\theta}$

يكافئ $z - a = a e^{i\theta}$

لما يمسح θ المجموعة $\mathbb{R}$ نكون لدينا:

$|z-a| = |a e^{i\theta}| = |a| = a$; $(a > 0$ لأن$)$

وهكذا: $|z-a| = a$

إذن (Γ) هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة a

ونصف قطرها $r = a$

حل التمرين الثاني:

I/ تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة: 2^z حلولا في $2014\alpha = 475\beta + m$

$2014\alpha - 475\beta = m$ يكافئ $2014\alpha = 475\beta + m$

لدينا $pgcd(2014; 475) = 19$

وهكذا:

$19(106\alpha - 25\beta) = m$ يكافئ $2014\alpha - 475\beta = m$

ومنه $19/m$ أي:

$\boxed{k \in \mathbb{Z} \text{ و } m = 19k}$

II/ لدينا المعادلة: (1) $\bullet\ 2014x - 475y = -19$

1) تعيين الحل $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق:

$y_0 - 4x_0 = 1$

المعادلة (1) تكافئ $19(106x - 25y) = -19$

تكافئ $(*) \ldots 106x - 25y = -1$

لدينا $y_0 = 4x_0 + 1$ بالتعويض في المعادلة (*)

نجد: $106x_0 - 25(4x_0 + 1) = -1$

بعد الحل نجد $x_0 = 4$ إذن $y_0 = 17$

إذن: $\boxed{(x_0; y_0) = (4; 17)}$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لأنهما تقبل نفس مجموعة الحلول.

إذن حل المعادلة (*)... $106x-25y=-1$

بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة (*) فإن

(E)..... $106(4)-25(17)=-1$

من (*) و (E) وبالطرح نجد:

$106x-25y=106(4)-25(17)$

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا: $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيما بينهما

حسب برهنة غوص: $25/(x-4)$

إذن $x-4=25k$ أي: $x=25k+4$

بتعويض المعادلة نجد (أو بالتعويض):

$y=106k+17$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات

$(25k+4;106k+17)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) نبين أن x و y أوليان فيما بينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1).

ليكن d قاسم مشترك لـ x و y.

d/x ومنه $d/106x$

d/y ومنه $d/25y$

إذن $d/106x-25y$ أي $d/-1$

بما أن $d\in\mathbb{N}$ فإن $d/1$

وهكذا $d=1$

إذن $PGCD(x;y)=1$

ومنه x و y أوليان فيما بينهما.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$n\equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17

أي نحل المجملة $\begin{cases} n\equiv 4[25] \\ n\equiv 17[106] \end{cases}$

إذن $\begin{cases} n=25\alpha+4 \\ n=106\beta+17 \end{cases}$ ومنه

$106\beta+17=25\alpha+4$

$106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$

ومنه الثنائية $(13\times4;13\times17)$ حل

خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$

بعد حل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$

بإتباع نفس الطريقة في الفرع 2) نجد:

$\beta\in\mathbb{N}$ مع $\begin{cases} \beta=25p+52 \\ \alpha=106p+221 \end{cases}$

لكن $n=106\beta+17$ بالتعويض نجد:

$n=106(25p+52)+17$

ومنه

$\boxed{p\in\mathbb{N} \text{ مع } n=2650p+5529}$

5) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون $(x+y)$ مضاعف للعدد 10

$x+y=(25k+4)+(106k+17)$

$=131k+21$

$(x+y)$ مضاعف للعدد 10 معناه:

$x+y\equiv 0[10]$

أي $131k+21\equiv 0[10]$

لكن $131k\equiv k[10]$ أي $131\equiv 1[10]$

و $21\equiv 1[10]$

إذن $k+1\equiv 0[10]$ ومنه $k\equiv -1[10]$

أي $k=-1+10[10]$ ومنه $k\equiv 9[10]$

إذن : $K = 10t + 9$

ومنه

$$(x;y) \in \{(250t + 229 ; 1060t + 971) / t \in \mathbb{Z}\}$$

حل التمرين الثالث :

1) نبين أن المثلث ABC قائم :

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{AB}.\vec{AC} = 3\times3 + 0\times3 + 3(-3) = 0$

ومنه الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان

إذن المثلث ABC قائم في A .

2) نبين أن المستوي (P) محمودي على المستقيم (AB) ونستخلص النقطة A .

من التمثيل الوسيطي للمستوي (P) نجد أن :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ شعاعي توجيه للمستوي (P)

و $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$$\begin{cases}\vec{AB}.\vec{u} = (-3)(3) + (2)(3) + (1)(3) = 0\\ \vec{AB}.\vec{v} = 3(1) + (3)(-1) + 0\times3 = 0\end{cases}$$

ومنه $\vec{AB}$ محمودي على الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

إذن المستقيم (AB) محمودي على المستوي (P)

نبين أن $A \in (P)$: من الجملة

نجد أن هذه الجملة تقبل حلاً وحيداً هو :

$$\begin{cases}-3\alpha + \beta = 3\\ 2\alpha - \beta = -2\\ \alpha + 3 = 2\end{cases}$$

$(\alpha ; \beta) = (-1 ; 0)$

إذن $A \in (P)$

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A والمحمودي على المستقيم (AC)

لدينا $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (AC) فهو شعاع ناظم لـ (Q) ومنه :

$(Q) : 3x - 3z + d = 0$

بما أن $A \in (Q)$ فإن

$3(3) - 3(2) + d = 0$

ومنه $d = -3$

إذن $(Q) : 3x - 3z - 3 = 0$

أو باختصار :

$$(Q) : x - z - 1 = 0$$

4) لتعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

أولاً : نجد معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(1) $x + y = -\alpha$ ومنه $\begin{cases}x = -3\alpha + \beta\\ y = 2\alpha - \beta\\ z = \alpha + 3\end{cases}$

(2) $z - 3 = \alpha$ لدينا ومنه $z = \alpha + 3$

من (1) و (2) نجد : $x + y = 3 - z$

إذن

$$(P) : x + y + z - 3 = 0$$

لدينا :

$$\begin{cases}(P) : x + y + z - 3 = 0\\ (Q) : x - z - 1 = 0\end{cases}$$

بوضع $z = t$ نجد : $x = t + 1$

و $y = -2t + 2$

إذن

$$(\Delta) : \begin{cases}x = t + 1\\ y = -2t + 2\\ z = t\end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

5) نبين أن المستقيم (AD) محمودي على المستوي (ABC) ، حيث $D(0;4;-1)$

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\vec{AD}.\vec{AB} = (3)(-3) + (3)(6) + (3)(-3) = 0\\ \vec{AD}.\vec{AC} = (3)(3) + (0)(6) + (-3)(-3) = 0\end{cases}$$

بما أن $\vec{AD}$ محمودي على الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير المرتبطين خطياً فهذا (AD) محمودي على المستوي (ABC)

6) حساب حجم رباعي الوجوه ABDC

رباعي الوجوه ABDC هو قائم قاعدته المثلث ABC لأن $(AD)\perp(ABC)$

نرمز بـ V إلى حجمه فيكون لدينا :

$V = \mathcal{A}(ABC) \times AD \times \frac{1}{3}$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2}$

وعليه ،

$V = \frac{AB \times AC \times AD}{6}$

بعد حساب الأطوال AB ، AC و AD نجد :

$V = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{2 \times 3} = 27\sqrt{6}\ (u.v)$

$\boxed{V = 27\sqrt{6}\ (u.v)}$

u.v (وحدة الحجوم) .

7) أ) نبين أن $\frac{\pi}{4}$ هو قيس بالراديان الزاوية الهندسية $B\hat{D}C$.

نعلم أن :

$\vec{BD}\cdot\vec{DC} = BD \times DC \times \cos(\vec{BD};\vec{DC})$

وعليه

$\cos(\vec{BD};\vec{DC}) = \frac{\vec{BD}\cdot\vec{DC}}{BD \times DC}$

لدينا $\vec{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{DC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$

$\vec{BD}\cdot\vec{DC} = -54$

$BD = \sqrt{(-6)^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{81} = 9$

$DC = 6\sqrt{2}$

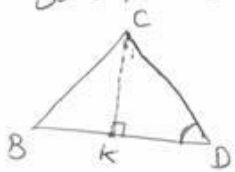
وعليه $\cos(\vec{BD};\vec{DC}) = \frac{-54}{9\times 6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن $\cos(\vec{BD};\vec{DC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

وعليه $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية الهندسية $B\hat{D}C$.

ب) حساب مساحة المثلث BDC :

ليكن K المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (BD)



$\sin\hat{D} = \frac{CK}{CD}$

وعليه

$CK = CD \times \sin\hat{D}$

لكن $\sin\hat{D} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ لأن $\hat{D} = \frac{\pi}{4}$

$CK = \frac{\sqrt{2}}{2} \times CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{2}$

$CK = 6$

وعليه ،

$\mathcal{A}(BDC) = \frac{BD \times CK}{2}$

$= \frac{6\times 9}{2} = 27\ (ua)$

وحدة المساحات (ua)

* استنتاج المسافة بين A والمستوي BDC :

نعتبر نرمز بـ d إلى هذه المسافة .

لحساب حجم رباعي الوجوه ABDC بطريقة ثانية بإعتبار قاعدته المثلث BDC فيكون ارتفاعه هو d .

وعليه :

$V = \frac{1}{3}\mathcal{A}(BDC) \times d$

وعليه : $d = \frac{3V}{\mathcal{A}(BDC)} = \frac{3\times 27\sqrt{6}}{27}$

$\boxed{d = 3\sqrt{6}}$ $\boxed{d = 3}$

حل التمرين الرابع :

لدينا : $x>0$ من أجل $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1$

$f(0) = 1$ و

I) 1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1 = -\infty$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2) دراسة قابلية اشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية اشتقاق f عند 0 من اليمين :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}x - x\ln x = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(0;1)$ من المنحنى (C_f).

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)$$

$$= x(3-2\ln x) - x$$

$$\boxed{f'(x) = 2x(1-\ln x)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $2x>0$

$f'(x)\geq 0$ يكافئ $1-\ln x \geq 0$

يكافئ $\ln x \leq 1$

يكافئ $x \leq e$

يكافئ $x \in]0;e]$

$f'(x)>0$ يكافئ $x \in]e;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$
	-1				

$f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$

4) نبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث :

$\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$:

من جدول التغيرات نجد أن الدالة f متناقصة تماما على $]e;+\infty[$ ، الدالة f مستمرة على هذا المجال وحصر صورته هي :

$$\begin{cases} f(e) = \frac{1}{2}e^2+1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]e;+\infty[$

من جدول التغيرات :

* من أجل $x \in [0;e]$: $f(x) \geq 1$

وهكذا يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6 < \alpha < 4,7$

نحسب $f(4,6)$ و $f(4,7)$ نجد $f(4,6)\times f(4,7)<0$.

5) كتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

$(D): y = f'(1)(x-1)+f(1)$

بعد الحساب نجد :

$$\boxed{(D): y = 2x+\frac{1}{2}}$$

III) لدينا: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1) حساب $g'(x)$ و $g'(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$\boxed{g'(x) = 2x(1-\ln x) - 2}$$

الدالة g' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

$$g''(x) = 2(1-\ln x) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g''(x) = -2\ln x}$$

* دراسة اتجاه تغير g' :

$g''(x)\geq 0$ يكافئ $-2\ln x \geq 0$

يكافئ $\ln x \leq 0$

يكافئ $0 < x \leq 1$

الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g'(x) < 0$ لكاني $-2\ln x < 0$:

لكافئ $\ln x > 0$

لكافئ $x > 1$

II الدالة g' متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g':

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	↗	0	↘	$-\infty$
	‖		-2		

لدينا $g'(1)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = -\infty$

اشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة g' نجد :

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ $\quad g'(x) \leq 0$.

2) تحديد اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1) : $g'(x) \leq 0$ وكذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g ولدينا $g(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	1	↘	$-\infty$
	‖		0		

من جدول تغيرات الدالة g نجد :

من أجل $x \in]0;1]$ $\quad g(x) \geq 0$

$x \in [1;+\infty[$ لكاني $g(x) \leq 0$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

نعود إلى دراسة إشارة الفرق

$f(x) - (2x+\frac{1}{2})$ أي $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أي اشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖ (C_f) تحت (D)		(C_f) تقاطع (D)	(C_f) تحت (D)	

$(C_f) \cap (D) = \{B(1;\frac{5}{2})\}$

3) انشاء (D) و (C_f) في أنظر الورقة المرفقة-

III)

حساب I_n بدلالة n (نستعمل الكاملة بالتجزئة)

لدينا $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

نضع :

$u(x) = \frac{1}{3}x^3$ ومنه $u'(x) = x^2$

$v'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه $v(x) = \ln x$

$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{n^3} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{n^3}\right)$

بعد التبسيط نجد :

$$I_n = \frac{1}{3n^3}\left[\frac{1}{3} + \ln(n)\right] - \frac{1}{9}$$

2) استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$

بما أن $1 \leq x \leq \frac{1}{n} > 0$ أي $0 < x < 1$

فإن $f(x) - (2x+\frac{1}{2}) > 0$ حسب السؤال 2)

من الجزء II .

أي أن : $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$

$f(x) - (2x+\frac{1}{2}) \geqslant 0$ وهكذا

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[f(x) - (2x+\frac{1}{2}) \right] dx$$

$$f(x) - (2x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 - 2x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x - 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x$$

ومنه

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

$$= \cancel{1 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n}} - I_n$$

بعد التبسيط نجد :

$$A(n) = \cancel{\quad} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - I_n$$

$$A(n) = -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3}\left[\frac{1}{3} + \ln(n) \right] + \frac{1}{9}$$

بعد التبسيط نجد :

$$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3} \right) + \frac{1}{9} \right) \times 4$$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n)$

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0$

وهكذا نجد

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{1}{9} \times (4)$$

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{4}{9}$$

ملاحظة :

تضرب قيمة المساحة في : مربع وحدة الأطوال

أي $4 = 2 \times 2$ بالمتر

الموضوع الثاني :

حل التمرين الأوّل :

1) تعيين قيم x و y حيث :

$x^2 e^{2iy} + 4 = 0$ و $x > 0$

$x^2 e^{2iy} + 4 = 0$ يكافئ $x^2 e^{2iy} = -4$

لنكتب (-4) على الشكل الأسي : $-4 = 4e^{i\pi}$

ومنه $x^2 e^{2iy} = 4e^{i\pi}$

إذن $\begin{cases} x^2 = 4 \\ 2y = \pi + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

بما أن $x > 0$ فإن $\boxed{x = 2}$

و $\boxed{k \in \mathbb{Z} \text{ مع } y = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

★ التحقق أن العدد $(-2i)$ حيث المساواة :

لدينا $-2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

ومنه $2^2 \times e^{2i(-\frac{\pi}{2})} + 4 = 4e^{-i\pi} + 4$

$= 4(-1) + 4 = 0$

إذن العدد $(-2i)$ حيث المساواة .

2) لدينا : $Z' = \frac{z - 2i}{z + 2i}$

$z = -2i + re^{i\theta}$; $z_B = -2i$; $z_A = 2i$

أ) نبين أن $Z' - 1 = \frac{4}{r} e^{i(-\theta - \frac{\pi}{2})}$

لدينا :

$Z' - 1 = \frac{z - 2i}{z + 2i} - 1$

$= \frac{z - 2i - z - 2i}{z + 2i} = \frac{-4i}{z + 2i}$

$= \frac{-4i}{-2i + re^{i\theta} + 2i}$

$= \frac{-4i}{re^{i\theta}}$

$= \frac{4}{r}\left(\frac{-i}{e^{i\theta}}\right)$

ومنه $Z' - 1 = \frac{4}{r} \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}}$ $\left(-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\right.$ لأن $\left.\right)$

إذن $\boxed{Z' - 1 = \frac{4}{r} e^{i(-\frac{\pi}{2} - \theta)}}$

ب) استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد Z' عدد حقيقيًا .

$Z' \in \mathbb{R}^*$ يكافئ $\arg(Z') = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(Z') = \arg\left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})$

$Z' \in \mathbb{R}$ معناه $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = k\pi$

إذن النقط M ، A ، B في استقامية

هكذا مجموعة النقط M بحيث يكون Z' عدد حقيقي هي المستقيم (AB) أي محور الراشيب باستثناء النقطة B .

ملاحظة : لما أجل $M = A$ يكون $Z' = 0$

ج) نبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C')

$M \in (C)$ معناه $|z - (-2i)| = 2$

أي $|z + 2i| = 2$

ومنه $z + 2i = 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

أي $z = -2i + 2e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

لكي z حرف ب : $z = -2i + re^{i\theta}$

أي $r = 2$

من السؤال ب) نجد : $Z' - 1 = \frac{4}{2} e^{i(-\frac{\pi}{2} - \theta)}$

نضع $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \theta$

$Z' - 1 = 2e^{i\alpha}$

وهكذا $|Z' - 1| = 2$

إذن $M'H = 2$ حيث H لاحقة 1

ومنه النقطة M' تنتمي إلى
الدائرة (C') التي مركزها H ذات اللاحقة 1
ونصف قطرها 2.

3) لدينا R الدوران الذي مركزه
النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
وزاويته α.

f) لتعيين القيس الرئيسي للزاوية α علما أن
$R(A)=H$ مع H صورة A
لدينا: الكتابة المركبة للدوران R
من الشكل:
$z' = az + b$
بحيث a هي زاوية الدوران R أي:
وبما أن I مركز هذا الدوران فإن:
$z' - z_I = a(z - z_I)$
لدينا $R(A)=H$ ومنه
$z_H - z_I = a(z_A - z_I)$
$z_I = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3(1+i)}{2}$
$I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

ومنه $a = \frac{z_H - z_I}{z_A - z_I}$
$= \frac{1 - \frac{3}{2}(1+i)}{2i - \frac{3}{2}(1+i)} = i$ (بعد التبسيط)
إذن $a = i$
ومنه $\alpha = \arg(i)$ أي $\alpha = \arg(a)$
إذن $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$ وهي زاوية الدوران.

ب) أنظر تعيين النقاط في الورقة المرفقة.

جـ) التحقق أن الدائرة (C') هي صورة دائرة
مركزها A بالدوران R.
لدينا $R(A)=H$ مع H مركز
الدائرة (C')
إذن الدائرة (C') هي صورة الدائرة (C)
التي مركزها A بالدوران R.

حل التمرين الثاني:
لدينا
$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) نبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $x_n = 2^{n+1} + 1$
نوظف مبدأ الاستدلال بالتراجع:
• من أجل $n=0$ لدينا $2^{0+1}+1 = 3 = x_0$ ومنه
الخاصية محققة من أجل $n=0$.
• نفرض أن الخاصية محققة من أجل العدد الطبيعي n
أي $x_n = 2^{n+1} + 1$ ونبرهن أن صحيحة
من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$ أي نبرهن أن
$x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$
لدينا:
$x_{n+1} = 2x_n - 1$
$= 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 1$ (من فرض التراجع)
$= 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$
وعليه صحة الخاصية من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$
حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع:
من أجل كل عدد طبيعي n: $x_n = 2^{n+1} + 1$

2) حساب $PGCD(x_{2014}; x_{1435})$ و $PGCD(x_8; x_8)$
لدينا $x_8 = 2x_8 - 1$
ومنه $PGCD(x_8; x_8) = PGCD(x_8; 1) = 1$
$x_{2014} = 2x_{2013} - 1$
$PGCD(x_{2014}; x_{2013}) = PGCD(x_{2013}; 1)$
$= 1$

نستنتج أن العددان x_{2014} و x_{2013} أوليان فيما بينهما والعددان x_{2014} كذلك أوليان فيما بينهما.

3) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
العددان x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما:

لدينا $x_{n+1} = 2x_n - 1$

ومنه $pgcd(x_{n+1}; x_n) = pgcd(x_n; 1)$

$= 1$

ومنه العددان x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما

4) أ) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$2x_n - y_n = 5$

نوظف مبدأ الاستدلال بالتراجع:

من أجل $n=0$: $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

نفرض أن الخاصية محققة من أجل العدد الطبيعي n أي $2x_n - y_n = 5$ ونبرهن صحتها من أجل العدد الطبيعي $(n+1)$ أي نبرهن أن

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3)$

$= 4x_n - 2 - 2y_n - 3$

$= 2(2x_n - y_n) - 5$

وحسب فرض الراجع: $2x_n - y_n = 5$

ومنه $2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(5) - 5$

$= 5$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالراجع:

" من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n - y_n = 5$ "

* استنتاج عبارة y_n بدلالة n :

$y_n = 2x_n - 5$ ومنه $2x_n - y_n = 5$

$y_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5$

$\boxed{y_n = 2^{n+2} - 3}$

ب) دراسة بواقي قسمة 2^p على 5 . تلخيصها في الجدول الأتي:

p	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 2^p على 5	1	2	4	3

أ) $d_n = pgcd(x_n; y_n)$

* تعيين القيم الممكنة لـ d_n

لدينا $y_n = 2x_n - 5$ ومنه

$d_n = pgcd(y_n; x_n) = pgcd(x_n; 5)$

إذن $\boxed{d_n \in \{1; 5\}}$

استنتاج قيم n بحيث يكون x_n و y_n أوليان فيما بينهما. أي $d_n = 1$.

$pgcd(x_n; 5) = 1$ معناه $d_n = 1$

أي x_n ليس مضاعف للعدد 5.

لتعيين قيم n بحيث x_n مضاعف للعدد 5 :

أي $x_n \equiv 0[5]$ ومنه $2^{n+1} + 1 \equiv 0[5]$

إذن $2^{n+1} \equiv -1[5]$

وهكذا : $2^{n+1} \equiv -1+5[5]$

ومنه $2^{n+1} \equiv 4[5]$

من الفرع ب) نجد $n+1 = 4k+2$

أي $n = 4k+1$

إذن قيم n بحيث تكون x_n و y_n أوليان فيما بينهما هي:

$\boxed{n \in \mathbb{N} - \{4k+1 ; k \in \mathbb{N}\}}$

معناه: قيم n هي كل الأعداد الطبيعية باستثناء الأعداد التي باقي قسمتها على 4 هو 1 أي:

$n \in \{4k; 4k+2; 4k+3 \ / \ k \in \mathbb{N}\}$

حل التمرين الثالث :

① تعيين طبيعة المجموعة (E) المعرفة بـ :

$$(\vec{MO}+2\vec{MA}+3\vec{MB})\cdot\vec{MC}=0$$

لدينا G مرجح الجملة $\{(O,1);(A,2);(B,3)\}$

إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء :

$$\vec{MO}+2\vec{MA}+3\vec{MB}=6\vec{MG}$$

ومنه

$$6\vec{MG}\cdot\vec{MC}=0$$

أي :

$$\vec{MG}\cdot\vec{MC}=0$$

إذن المجموعة (E) هي سطح كرة قطرها $[GC]$

2) لدينا

$$(\pi_m):(2-m)x+y+mz+6m-6=0$$

ب) تعيين قيم m بحيث (π_m) تشمل المستقيم (Δ) :

لدينا

$$(2-m)x+y+mz+6m-6=0$$

ومنه

$$2x+y+6+m(-x+z+6)=0$$

من أجل كل m من $\mathbb{R}$: $2x+y+6+m(-x+z+6)=0$

ومنه

$$\begin{cases}2x+y+6=0\\ \text{و}\\ -x+z+6=0\end{cases}$$

وهي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم في الفضاء .

إذن كل المستويات تشمل مستقيما ثابتا (Δ) معرف بالجملة

$$(\Delta):\begin{cases}2x+y-6=0\\ -x+z+6=0\end{cases}$$

* تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

بوضع $x=t$ نجد : $y=-2t+6$

$z=t-6$

وعليه :

$$(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=-2t+6\\ z=t-6\end{cases}\quad ;t\in\mathbb{R}$$

ب) كتابة معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(2,1,2)$ ونصف قطرها 3 .

$$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

ج) تعيين قيم m بحيث يكون (π_m) مماسا لسطح الكرة (S) : أي

$$d(\Omega;(\pi_m))=3$$

$$\frac{|(2-m)(2)+1+2m+6m-6|}{\sqrt{(2-m)^2+m^2+1}}=3$$

نجد التبسيط نجد

$$\frac{|6m-1|}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=3$$

بتربيع الطرفين نجد

$$\frac{(6m-1)^2}{2m^2-4m+5}=9$$

وعليه :

$$(6m-1)^2=9(2m^2-4m+5)$$

ومنه :

$$18m^2+24m-44=0$$

نجد عليه :

$$m_1=\frac{-12-\sqrt{936}}{18}\quad ;\quad m_2=\frac{-12+\sqrt{936}}{18}$$

د) هل توجد قيم للعدد m بحيث يكون المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ عموديا على المستوي (π_m) :

لدينا : (π_m) شعاع ناظم لـ $\vec{n}_m\begin{pmatrix}2-m\\1\\m\end{pmatrix}$

يكون (D) عموديا على (π_m) إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}_m$ مرتبطان خطيا أي :

$$\begin{cases}\frac{2-m}{1}=\frac{1}{-2}\\ \text{و}\\ \frac{m}{1}=\frac{1}{-2}\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}m=\frac{5}{2}\\ \text{و}\\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}$$ تناقض

إذن لا توجد قيم للعدد m بحيث يكون (D) عموديا على (π_m) .

حل التمرين الرابع :

لدينا : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$.

الجزء الأول :

1) أ) نضع $t = \frac{2}{x-1}$

لنتحقق أن $f(x) = \frac{e}{2} t^2 e^t$

$$\frac{e}{2} t^2 e^t = \frac{e}{2} \left(\frac{2}{x-2}\right)^2 e^{\left(\frac{2}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{e}{2} \times \frac{4}{(x-2)^2} \cdot e^{\left(\frac{2}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{(x-2)^2} \cdot e^{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = f(x)$$

* حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$

لدينا $t = \frac{2}{x-1}$

لما $x \to 1$ فإن $t \to -\infty$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{t \to -\infty} \frac{e}{2} t^2 e^t = 0$$

لأن :

$$\lim_{t \to -\infty} t^2 e^t = 0$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 0$

ب) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

لأن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

التفسير البياني :

المستقيم المعرف بالمعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

2) نبين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty ; 1[$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x-1)^4} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; 1[$ حيث :

$$f'(x) = -\frac{2 \times 2}{(x-1)^3} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left[\frac{-2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]$$

$$= -\frac{4}{(x-1)^3} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} - \frac{4}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= \left[-\frac{4}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^4}\right] \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

بعد التبسيط نجد :

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} \cdot e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

3) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة المقدار $(-4x)$

لأن $\frac{1}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} > 0$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

4) إنشاء المنحنى (C_f) في الورقة المرفقة :

الجزء الثاني :

1) تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty ; 1[$:

الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty ; 1[$ على تقبل دوال أصلية على هذا المجال .

ولدينا $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

بوضع $u(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ فإن

$$f(x) = -\left(u'(x) \cdot e^{u(x)}\right)$$

ومنه الدالة F المعرفة على $]-\infty ; 1[$ بـ $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}}$ هي دالة أصلية للدالة f .

ج) دالة الدالة $x \longmapsto -e^{\frac{x+1}{x-1}}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty, 1[$

2) لدينا $\alpha \in]0;1[$

أ) حساب العدد $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}} \right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow = -e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + e^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

إذن $I(\alpha) = e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$

ب) حساب $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} I(\alpha)$:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} I(\alpha) = \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} \left[e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \right]$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} \left(\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1} \right) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right) = -\infty \end{cases}$$

وعليه

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} I(\alpha) = 1}$$

3) حساب المساحة $\mathcal{A}$ بـ cm^2

بما أن الدالة f فردية على المجال $[-1;1]$ فإن

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

من السؤال السابق:

$$\mathcal{A} = \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} I(\alpha)$$

ومنه

$$\mathcal{A} = 1 \times (2 \times 2)\ cm^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 4\ cm^2}$$

الجزء الثاني:

1) - ب) تبيين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{e}$ تقبل حلين أحدهما -1 والآخر β في المجال $]-\infty, 1[$.

من جدول تغيرات الدالة f لدينا

$\frac{1}{e} \in]0; \frac{2}{e}[$

إذن من أجل $x = -1$ لدينا :

$f(-1) = \frac{1}{e}$

من أجل $x \in]0;1[$ لدينا:

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1[$ ولدينا :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) \leq \frac{1}{2} \leq f(0)$$

وهكذا المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا ~~غير معلوم~~ β في المجال $]0;1[$.

2) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x) = f(k)$ حسب قيم الوسيط k

نضع : $k' = f(k)$

يكون k' موجود إذا كان $k \in D_f$ أي $k \in]-\infty, 1[$ حيث $0 < k' \leq \frac{2}{e}$

$f(x) = k'$ نكافئ $f(x) = f(k)$

من التمثيل البياني نجد :

* من أجل $0 < k' < \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين

* من أجل $k' = \frac{2}{e}$ فالمعادلة تقبل حل مضاعف

إذن:

* من أجل $k \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

* من أجل $k = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $\frac{e}{e}$