**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

**التمرين الأول:** ( 06 نقاط )

$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الاول $u_0=2$ و $u_0+5u_1+5u_3=102$

1) بين أن : $u_1+u_3=20$ و استنتج $u_2$

2) أحسب $u_1$ و استنتج أن أساس المتتالية $(u_n)$ هو 4

3) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

4) أ/ أكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

ب/ عين قيمة العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n=162$

**التمرين الثانـي :** ( 06 نقاط )

1) أ/ عين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد $2^n$ من أجل قيم $n$ التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4.

ب/ استنتج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد $2^n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$

2) عين باقي قسمة 17 على 5 و استنتج باقي قسمة العدد $17^{4k}$ على 5 حيث $k$ عدد طبيعي

3) استنتج أن العدد $17^{4k}+2^{4k+3}+6$ يقبل القسمة على 5 حيث $k$ عدد طبيعي

4) عين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016}-2^{49}+61^{1954}$

**التمرين الثالث :** ( 08 نقاط )

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) بين أنه من أجل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن : $f(x)=-1+\dfrac{a}{x-1}$ حيث $a$ عدد حقيقي يطلب تعيينه

2) أ/ عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ استنتج المستقيمان المقاربان للمنحنى $(C_f)$

3) أحسب $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة $A(2;0)$.

5) أحسب $f(0)$ ، أنشئ المماس $(T)$ ، المستقيمين المقاربين ثم المنحنى $(C_f)$

6) أ/ أنشيء في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$.

ب/ حل في $\mathbb{R}$ ، بيانيا المتراجحة $f(x)\le x-2$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول:** ( 06 نقاط )

$a$ ، $b$ و $c$ ثلاث أعداد صحيحة حيث $b \equiv 2[5]$ ، $a-b \equiv 2[5]$ ، $2a+c \equiv 4[5]$

1) بين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5

3) أ/ بين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$

ب/ أثبت أن العدد $3\times a^{2017} + 5\times c^{1438} + 13$ مضاعف لـ 5

ج/ عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق : $a^2+b^2+c^2+n \equiv 4[5]$ و $3 \le n \le 28$

**التمرين الثاني:** (06 نقاط )

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ذات اساس سالب حيث : $v_0 = 2$ و $v_2 = 18$

1) أحسب $v_1$ واستنتج اساس المتتالية $(v_n)$

2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $v_n = 2\times(-3)^n$

3) أ/ أحسب $(-3)^8$ و استنتج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية $(v_n)$

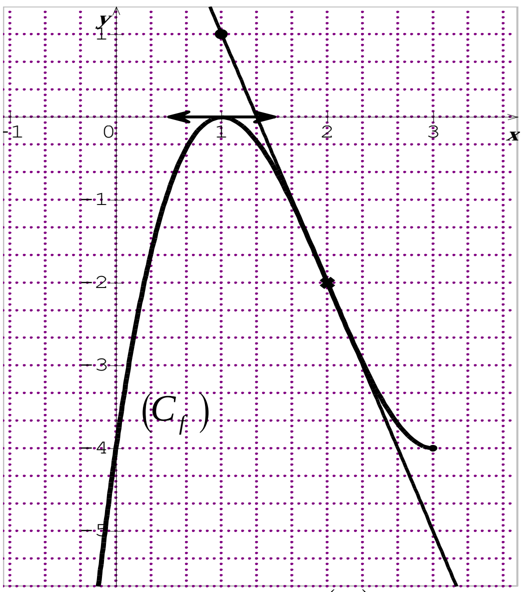
ب / أحسب قيمة المجموع : $2+(-6)+18+\cdots+13122$

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن العدد $(-3)^n - 1$ مضاعف لـ 4

**التمرين الثالث :** (08 نقاط )

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

**الجزء 1** : المنحني المقابل هو جزء من المنحني $(C_f)$ ، والمستقيم $(T)$ هو مماس للمنحني $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2




بإستعمال المنحني $(C_f)$ :

1) عين $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$

2) أكتب معادلة للمماس $(T)$

3) ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة $(C_f)$ ، مع التعليل

**الجزء 2** : نفرض أن : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

بإستعمال العبارة $f(x)$ :

1) أ/ أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب / ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

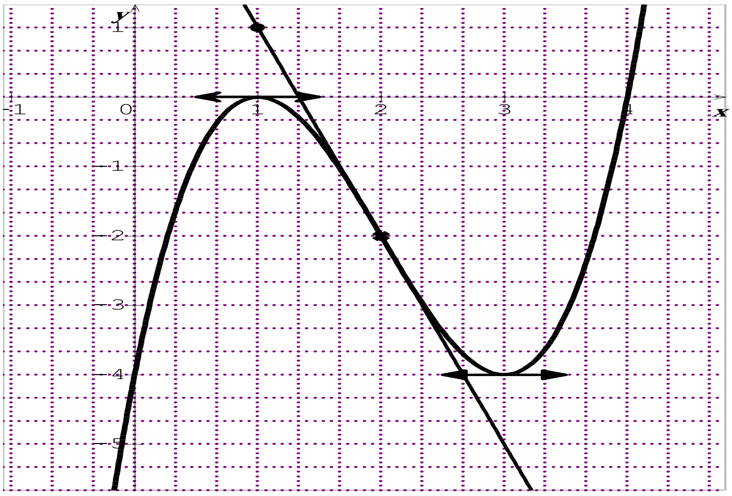
2) تحقق أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$

3) أ/ أنشر العبارة : $(x-1)(x^2-5x+4)$

4) ب/ عين نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل، ثم أكمل إنشاء المنحني $(C_f)$

| عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة كاملة |
|---|---|---|
| **الموضوع الثاني** | | |
| **التمرين الأول:** ( 06 نقاط ) | | |
| 1) نبين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$ ............................................ | 0.5 ن | |
| لدينا $b \equiv 2[5]$ و $a-b \equiv 2[5]$ ومنه خاصية الجمع نجد $a \equiv 4[5]$ | +0.5 ن | |
| لدينا $a \equiv 4[5]$ اذن $-2a \equiv -8[5]$ وبمأن $2a+c \equiv 4[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $c \equiv -4[5]$ | | |
| 2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5........................................ | 0.5 ن | |
| لدينا $a \times b \equiv 3[5]$ و $-3c \equiv 2[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $a \times b - 3c \equiv 0[5]$ | +0.5 ن | |
| ومنه باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5 هو 0 | | |
| 3) أ/ نبين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$ ........................................................ | 0.5 ن | |
| لدينا $a \equiv 4[5]$ ومنه $a \equiv 4-5[5]$ اي : $a \equiv -1[5]$ | +0.5 ن | |
| لدينا $c \equiv -4[5]$ ومنه $c \equiv -4+5[5]$ اي : $c \equiv 1[5]$ | | |
| ب/ أثبات أن العدد $3\times a^{2017}+5\times c^{1438}+13$ مضاعف لـ 5 ........................................ | | |
| لدينا $a \equiv -1[5]$ وبالتالي $a^{2017} \equiv (-1)^{2017}[5]$ اي $a^{2017} \equiv -1[5]$ | 1.5 ن | 06 ن |
| و لدينا $c \equiv 1[5]$ وبالتالي $c^{1438} \equiv 1[5]$ | | |
| وعليه نجد $3\times a^{2017}+5\times c^{1438}+13 \equiv 3\times(-1)+5\times 1+13[5]$ أي $3\times a^{2017}+5\times c^{1438}+13 \equiv 15[5]$ | | |
| ومنه $3\times a^{2017}+5\times c^{1438}+13 \equiv 0[5]$ لان $15 \equiv 0[5]$ حسب خاصية التعدي | | |
| ج/ تعين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق : $a^2+b^2+c^2+n \equiv 4[5]$ و $3 \le n \le 28$................... | 1.5 ن | |
| لدينا $a^2 \equiv 1[5]$ و $b^2 \equiv 4[5]$ و $c^2 \equiv 1[5]$ ومنه | | |
| $a^2+b^2+c^2+n \equiv 4[5]$ معناه $6+n \equiv 4[5]$ | | |
| معناه $n \equiv -2[5]$ معناه $n \equiv 3[5]$ معناه $n \equiv 5k+3$ $(k \in \mathbb{N})$ | | |
| وبمأن $3 \le n \le 28$ فإن قيم العدد الطبيعي هي 3، 8 ، 13 ، 18 ، 23 و 28 | | |
| **التمرين الثاني:** (06 نقاط ) | | |
| 1) حساب $v_1$ واستنتج $q$ اساس المتتالية $(v_n)$ | | |
| ـــ حسب الوسط الهندسي للحدين $v_0$ و $v_2$ لدينا $v_1{}^2 = v_0 \times v_2$ أي $v_1{}^2 = 36$ وبمأن اساس | | |
| المتتالية سالب فإن $v_1 = -6$ ........................................................................ | 01 ن | |
| ـــ لدينا $q = \dfrac{v_1}{v_0}$ وبمأن $v_0 = 2$ و $v_1 = 6$ فإن $q = -3$ ........................................ | 0.5 ن | |
| 2) نبين أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $v_n = 2\times(-3)^n$ ........................................ | 0.5 ن | 06 ن |
| عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)$ تكتب : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 2\times(-3)^n$ لان $q=-3$ و $v_0 = 2$ | | |
| 3) أ/ حساب $(-3)^8$ و استنتاج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية $(v_n)$ | | |
| – $(-3)^8 = 6561$ ........................................................................ | 0.5 ن | |
| – $v_n = 13122$ يعني $v_n = 2\times(-3)^n$ يعني $n = 8 \in \mathbb{N}$ ........................................ | 01ن | |
| ب / حساب قيمة المجموع : $2+(-6)+18+\cdots+13122$ ........................................ | 01 ن | |
| لدينا $v_0+v_1+v_2+\cdots+v_8 = 2+(-6)+18+\cdots+13122$ اي | | |

| عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة كاملة |
|---|---|---|
| $2+(-6)+18+\cdots+13122=\frac{v_0}{q-1}\left((-3)^9-1\right)$ ومنه $2+(-6)+18+\cdots+13122=9642$ | | |
| 4) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن العدد $(-3)^n-1$ مضاعف لـ 4 ................ | 1.5 ن | |
| ● من أجل $n=0$ لدينا $(-3)^0-1=0$ اي 0 مضاعف لـ 4 محققة | | |
| ● نفرض أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن العدد $(-3)^n-1$ مضاعف لـ 4 ( فرضية التراجع ) | | |
| ونبرهن أن : $(-3)^{n+1}-1$ مضاعف لـ 4 | | |
| لدينا فرضا $(-3)^n-1$ مضاعف لـ 4 يعني $(-3)^n-1=4k$ حيث $(k\in\mathbb{N})$ | | |
| ومنه $(-3)^{n+1}-1=-3(-3)^n-1=-3(-3)^n+3-3-1$ اي | | |
| $(-3)^{n+1}-1=-3\left((-3)^n-1\right)-4=-3(4k)-4=4(-3k-1)$ ومنه $(-3)^{n+1}-1$ مضاعف لـ 4 | | |
| وعليه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن العدد $(-3)^n-1$ مضاعف لـ 4 | | |
| **التمرين الثالث :** ( 08 نقاط ) | | |
| **الجزء 1** : بإستعمال المنحنى $(C_f)$ | | |
| 1) $f(1)=0$ ، $f(2)=-2$ ، $f'(1)=0$ و $f'(2)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 والذي يشمل النقطتين ذات الاحداثيات $(1;1)$ و $(2;-2)$ ومنه $f'(2)=-3$ | 0.25 ×3 +0.5ن | 08 ن |
| 2) كتابة معادلة للمماس $(T)$ | | |
| $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=-3x+4$ ................................................ | 0,5 ن | |
| **3)** ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة $(C_f)$ ................................................ | 0.5 ن | |
| بمان المنحنى $(C_f)$ يخترق مماسه $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة 2 فإن هذه النقطة تمثل نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$ | | |
| **الجزء 2** : نفرض أن : $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ | | |
| بإستعمال العبارة $f(x)$ : | | |
| 1) أ/ حساب نهايتي الدالة $f$ : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .......................... | 0.5ن ×2 | |
| ب / دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ | | |
| الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على و $f'(x)=3x^2-12x+9$ .................................... | 0.5 ن | |
| $\Delta=36$ ، $x_1=1$ ، $x_1=3$ ........................................................................ | | |
| الدالة $f$ متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;1]$ و $[3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;3]$....... | 01ن | |
| جدول تغيرات الدالة $f$ ............................................................................... | 0.5 ن | |
| أ/ نشر العبارة : $(x-1)(x^2-5x+4)$ | | |
| $(x-1)(x^2-5x+4)=x^3-6x^2-9x-4$ ............................... | 0.5 ن | |
| ب/ تعين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل ............................................ | 0,75 ن | |
| $f(x)=0$ يعني $(x-1)(x^2-5x+4)=0$ | | |
| يعني $x=1$ أو $x=4$ ومنه $(C_f)\cap(xx')=\{(1;0);(4;0)\}$ | | |
| 2) نبين أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$ .................................... | 01ن | |
| الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على و $f''(x)=6x-12$ | | |
| – $f''(x)=0$ يعني $x=2$ | | |

| عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة كاملة |
|---|---|---|
| ـ الدالة $f''$ موجبة على المجال $[2;+\infty[$ وسالبة على المجال $]-\infty;2]$ | | |
| اذن : بما إن الدالة $f''$ تنعدم عند 2 وتغير اشارتها عند 2 فإن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$ | | |
| أكمال إنشاء المنحني $(C_f)$  | 0,5 ن | |
| **الموضوع الاول** | | |
| **التمرين الأول:** ( 06 نقاط ) | | 06 ن |
| $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الاول $u_0=2$ و $u_0+5u_1+5u_3=102$ | | |
| 1) نبين أن : $u_1+u_3=20$ و استنتاج $u_2$ | | |
| ـ $u_0+5u_1+5u_3=102$ يعني $5(u_1+u_3)=100$ اي $u_1+u_3=20$ ..................... | 0,75 | |
| ـ حسب الوسط الحسابي للحدين $u_1$ و $u_3$ لدينا $u_1+u_3=2u_2$ اي $u_2=10$ ..................... | 0,75 | |
| 2) حساب $u_1$ و استنتاج أن أساس المتتالية $(u_n)$ هو 4 | | |
| ـ حسب الوسط الحسابي للحدين $u_0$ و $u_2$ لدينا $u_0+u_2=2u_1$ اي $u_1=6$ ..................... | 0,75 | |
| ـ لدينا $r=u_1-u_0$ أي $r=4$ ........................................................................ | 0,75 | |
| 3) كتابة عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ ........................................................................ | 01 ن | |
| $u_n=u_0+nr$ ومنه $u_n=2+4n$ | | |
| 4) أ/ حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ................................ | 01 ن | |
| عدد الحدود هو $n+1$ | | |
| $S_n=\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ ومنه $S_n=2(n+1)^2$ | | |
| ب/ تعين قيمة العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n=162$ ........................................ | 01 ن | |
| $S_n=162$ يعني $(n+1)^2=81$ أي $n=8$ أو $n=-10\notin\mathbb{N}$ مرفوض | | |

| عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة كاملة |
|---|---|---|

**التمرين الثانـــي : (06 نقاط)** — 06 ن

1) أ/ تعين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد $2^n$ من أجل قيم $n$ التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ....... — 01 ن

$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 هي 1، 2، 3 و 4

ب/ استنتاج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد $2^n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$....................... — 01 ن

من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :

$2^{4k} \equiv 1[5]$ ، $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ ، $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ و $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد $2^n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ هي 1، 2، 3 و 4

2) تعين باقي قسمة 17 على 5 و استنتج باقي قسمة العدد $17^{4k}$ على 5 حيث $k$ عدد طبيعي .......... — 01 ن

لدينا $17 \equiv 2[5]$

بماأن $17 \equiv 2[5]$ فإن $17^{4k} \equiv 2^{4k}[5]$

ومنه $17^{4k} \equiv 1[5]$ لان $2^{4k} \equiv 1[5]$ حسب خاصية التعدي حيث $k$ عدد طبيعي

3) استنتاج أن العدد $17^{4k}+2^{4k+3}+6$ يقبل القسمة على 5 حيث $k$ عدد طبيعي..................... — 01 ن

لدينا من أجل كل $k$ عدد طبيعي ، $17^{4k} \equiv 1[5]$ و $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ ومنه $17^{4k}+2^{4k+3}+6 \equiv 10[5]$ أي $17^{4k}+2^{4k+3}+6 \equiv 0[5]$

4) تعيين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016}-2^{49}+61^{1954}$ .............................. — 02 ن

ـ لدينا : $61 \equiv 1[5]$ ومنه $61^{1954} \equiv 1[5]$

ـ ولدينا $2017 \equiv 2[5]$ وبمأن $2016 = 4 \times 504$ ( 2016 من الشكل $4k$ )

ومنه $2017^{2016} \equiv 2^{4\times 504}[5]$ أي $2017^{2016} \equiv 1[5]$

ـ ولدينا $2^{49} \equiv 2[5]$ لان $49 = 4\times 12+1$ أي 49 من الشكل $4k+1$

وبالتالي $2017^{2016}-2^{49}+61^{1954} \equiv 1-2+1[5]$ أي $2017^{2016}-2^{49}+61^{1954} \equiv 3[5]$

ومنه باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016}-2^{49}+61^{1954}$ هو 3

**التمرين الثالث : (08 نقاط)** — 08 ن

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

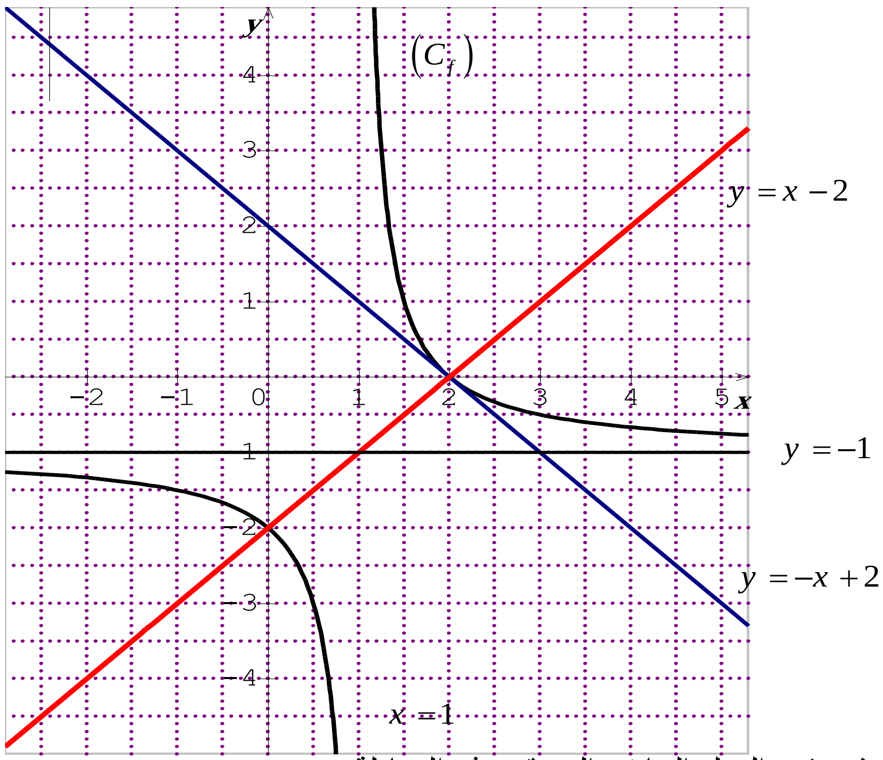
1) نبين أنه من أجل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن : $f(x)=-1+\dfrac{a}{x-1}$ حيث $a$ عدد حقيقي يطلب تعيينه

$f(x)=-1+\dfrac{a}{x-1}$ يعني $f(x)=\dfrac{-x+1+a}{x-1}$ ومنه $a=1$ ..................................... — 01 ن

و بالتالي : $f(x)=-1+\dfrac{1}{x-1}$

2) أ/ تعيين النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ....................... — 02 ن

| عناصر الإجابة | العلامة مجزأة | العلامة كاملة |
| --- | --- | --- |
| ب/ استنتاج المستقيمان المقاربان للمنحني $(C_f)$ | | |
| $y=-1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ ................................ | 0,5 ن | |
| $x=1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ ........................................................ | | |
| 3) حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة $f$ ........................................................ | 01 ن | |
| الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ أي $f'(x)<0$ | | |
| ومنه الدالة $f$ متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ | | |
| 4) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A(2;0)$ ........................................ | 01 ن | |
| $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=-x+2$ | | |
| 5) $f(0)=-2$ ، إنشاء المماس $(T)$ ، المستقيمين المقاربين ثم المنحني $(C_f)$ ........................... | 0,25<br>0,25<br>01 ن | |
|  | | |
| 6) أ/ إنشاء في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$ . ........................................ | 0,25 | |
| ب/ حل في $\mathbb{R}$ ، بيانيا المتراجحة $f(x)\le x-2$ ........................................................ | 0,75 | |
| $S=[0;1[\cup[2;+\infty[$ | | |