المستوى: الأقسام النهائية – رياضيات

السنة الدراسية: 2015/2014 المدة: ساعتين ونصف

4 ساعات

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

اختر موضوعا واحدا مع عدم نسيان الإشارة إلى رقم الموضوع المختار

الموضوع الأول

التمرين الأول

1- a عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1. p عدد طبيعي.

أ- أثبت أنه إذا كان d قاسما للعددين $a^p - 1$ و $a^{p+1} - 1$ فإن d يكون قاسما للعدد $a^p(a-1)$

ب- أعط القيم الممكنة لـ: $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1)$

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

أ- تحقق من أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 4u_n + 1$

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n هو عدد طبيعي.

د- عين $PGCD(u_{n+1}, u_n)$، (يمكن استعمال خوارزمية إقليدس)

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية. أحسب u_n بدلالة n

ب- استنتج $PGCD(4^{p+1}-1, 4^p-1)$ من أجل P عدد طبيعي.

التمرين الثاني

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

P المستوي ذو المعادلة $2x - y + z - 2 = 0$. $A(0;0;2)$ و $B(1;0;0)$ النقطتان من المحورين (oz) و (ox) على الترتيب

1- تحقق من أن النقطتين A و B تنتميان إلى (P) ثم أحسب مساحة المثلث OAB

2- عين إحداثيات النقطة C تقاطع (P) مع محور (oy) ثم تحقق أن حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي $\frac{2}{3}$

3- أحسب بعد النقطة O عن المستوي (P) ثم استنتج مساحة المثلث ABC

4- أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة o ويعامد المستوي (P) ثم استنتج إحداثيات النقطة H تقاطع المستوي (P) والمستقيم (d)

5- عين قيمة العدد α حتى تكون H مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بالمعاملات 1 ، α ، 1 على الترتيب.

التمرين الثالث

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 3az + 17a = 0$ ......(*) " α عدد حقيقي"

1- أوجد قيم α حتى تقبل المعادلة (*) حلين مركبين مترافقين

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*) من أجل $\alpha = 2$

نزود المستوي بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، D, C, B, A أربع نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_D = 5 - i, z_C = 7 + 3i, z_B = 3 - 5i, z_A = 3 + 5i$$

- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم أكتب العدد $\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)^{2015}$ على الشكل الجبري.
- استنتج طبيعة المثلث ABC وأن $BC = 2AC$
- أوجد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC
- بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول B إلى A و C إلى D يطلب تعين عناصره المميزة.

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل التالي: $f(x) = \ln(e^{-x} + 1) + \frac{1}{3}x$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول

1-أ- أحسب نهاية الدالة f في جوار $(+\infty)$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) = \ln(e^{x} + 1) - \frac{2}{3}x$ استنتج نهاية f عند $(-\infty)$

ج- بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (D) و (T) يطلب تعين معادلة لكل منهما

د- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) و (T)

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$ استنتج تغيرات f وشكل جدول تغيراتها.

ب- أرسم (D) و (T) و (C_f)

الجزء الثاني

n عدد طبيعي غير معدوم نسمي A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$ و $x = n$

1- برر أنه من أجل n من IN^* فإن: $A_n = \int_0^n \ln(e^{-x} + 1)dx$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\ln(e^{-x} + 1) \le e^{-x}$ ثم بين أنه من أجل كل n من IN^* فإن: $A_n \le 1$

3- هل المتتالية A_n متقاربة؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 5^n على 7

2- أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق $5^{2n}+5^n \equiv 0[7]$

3- عين العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1)$ يقبل القسمة على 7

4- A عدد طبيعي يكتب $\overline{x\,0\,y\,0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 عين x و y حتى يكون A قابلا للقسمة على 35 ثم أكتب العدد A في النظام العشري

5- (u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة تماما حيث $u_0-2u_1+u_2=16$ و $u_0u_1u_2=125$

- أحسب الحد الأول والأساس للمتتالية (u_n) ثم عبر عن (u_n) بدلالة n
- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+..u_n$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $4S_n \equiv 0[7]$

التمرين الثاني

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

1- بين أن النقط A و B و C تعين مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له.

2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- t عدد حقيقي موجب تماما، I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب G مرجح النقط A و B و C المرفقة بالمعاملات 1 و 2 و t على الترتيب.

- أوجد إحداثيات I ثم عبر عن الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$
- أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ ثم استنتج مجموعة النقط G لما t يمسح المجال $]0;+\infty[$
- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوى (ABC) في النقطة A
- (S) سطح كرة نصف قطرها $\sqrt{29}$ يمس المستوى (ABC) في النقطة A عين مركزه.

التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ وحدة الطول $6cm$

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z$

نعرف متتالية النقطية (M_n) كما يلي: M_0 لا حقتها z_0 حيث $z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1}=f(M_n)$

يرمز z_n إلى لاحقة النقطة M_n

1- حدد طبيعة التحويل f وعين عناصره المميزة ثم أنشئ النقط M_0 ، M_1 ، M_2

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$. (يمكن استعمال البرهان بالتراجع)

3- n و p عددان طبيعيان، بين أن النقطتين M_n و M_p متطابقتان إذا وفقط إذا كان العدد $(n-p)$ مضاعفا للعدد 12

4- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $12x-5y=3....(*)$

- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (*)

- استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها النقطة M_n تنتمي الى نصف المستقيم $[ox)$ باستثناء النقطة O (يعني أن فاصلة M_n موجبة تماما وترتيبها معدوم)

التمرين الرابع

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \ , \ x\in]0,+\infty[\\ f(0)=1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

الجزء الأول

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة

1-ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أ- أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0

2- ب- أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$، تحقق أن: $4,6<\alpha<4,7$

4-أكتب معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

5- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$: $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g'، استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g، استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

ج- أحسب $f(6)$، ثم أنشئ (C_f) و (D)

الجزء الثاني

n عدد طبيعي غير معدوم، نضع $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$، باستعمال التكامل بالتجزئة . أحسب I_n بدلالة n

- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ: cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (D) والمستقيمين ذا المعادلتين: $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$

بالتوفيق والنجاح