

👍 اختبار في مادة الرياضيات

👍 التمرين الأول (04 نقاط) 😊

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط D, B, A التي لواحقتها على الترتيب $a = 4 - i, b = 4 + i, d = -i$.
- و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = 2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- (أ) بين أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$.
- (ب) تحقق أن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c = 1 + 2i$.
- (ج) بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .
- (د) بين أن النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .
- (هـ) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ، $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$.

👍 التمرين الثاني (05 نقاط) 😊

- في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$ و
- (P) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق ، $MA^2 - \overline{MA} \cdot \overline{MI} = 0$
- (1) (أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) .
- (ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.
- (2) لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة I وتمر من النقطة A .
- تحقق أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R = \sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)
- (3) ليكن (P') المستوي ذي المعادلة $2x - y + z - 4 = 0$.
- (أ) بين أن (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .
- (ب) لتكن $B(2; -2; -2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C).
- (ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

التمرين الثالث ☺☺ (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 .
- (2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلا للقسمة على العدد 7 .
- (3) N عدد طبيعي يكتب $1xx0$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 . حيث x عدد طبيعي .
(أ) عين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35 .
(ب) أكتب العدد N في النظام العشري .

التمرين الرابع ☺☹ (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3 \ln\left(\frac{x^2 + 2}{3x}\right)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I. (1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما x ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

(5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f) .

II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

(2) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

بالتوفيق و النجاح ☺☹ في البكالوريا ☺ جوان 2015 ✪ أستاذ المادة

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية:
 $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B, C و D التي

لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -1 - i\sqrt{3}, z_D = \overline{z_C}$.

(أ) أكتب الأعداد المركبة z_A, z_B, z_C, z_D على الشكل الأسّي.
(ب) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها.

(ج) بين أن: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم عين قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CA}, \overline{BD})$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD) ؟

(3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و عمدة له $\frac{2n\pi}{3}$ ، حيث n عدد طبيعي.

ونعرف العدد المركب L_n بـ: $L_n = z_D \times z_n$.

(أ) أكتب كلا من العددين L_1, L_0 على الشكل الجبري.

(ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = |L_n|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

▪ بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

▪ لتكن النقط $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ على الترتيب.

أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \|\overline{OM_0}\| + \|\overline{OM_1}\| + \dots + \|\overline{OM_n}\|$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثاني (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ نعتبر النقط $A(1; 2; 3), B(0; 1; 4), C(-1; -3; 2)$

و $D(4; -2; 5)$ و الشعاع $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ حيث a, b عدنان حقيقيان.

1. (أ) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا ABC .

(ب) عين العددين الحقيقيين a, b بحيث يكون الشعاع \vec{n} ناظميا للمستوي ABC ثم عين معادلة ديكرتية للمستوي

ABC .

2. ليكن المستقيم Δ ذي التمثيل الوسيطى: $t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$

(أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم Δ وأن المستقيم Δ عمودي على المستوي ABC .

(ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي ABC .

(ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي ABC .

(د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC .

3. أدرس تقاطع المستقيم Δ مع المستوي O, \vec{i}, \vec{j} .

التمرين الثالث (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.
 (2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.
 (3) بين أن العدد 131 أولي .

$$(4) \begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases} \text{ عين الأعداد الطبيعية } n \text{ التي تحقق :}$$

حيث ، $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$.

- (5) عين قيم n بحيث يكون ، $7 < n < 15$ ثم استنتج الثنائيات (a, b) .

التمرين الرابع (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$
 نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة الطول $2cm$)

I. (1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

(5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f) .

(6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E) : f(x) = f(m)$$

(7) أ) عين العددين الحقيقيين b, a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمت التي

معادلاتها : $x = \frac{1}{2}, y = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S(\lambda)$.

II. نسمي $f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', \dots, f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f .

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة

n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n; y_n)$.

(أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .

(ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

بالتوفيق و النجاح في البكالوريا ☺☺ جوان 2015 أستاذ المادة

العلامة	التصحيح
	التمرين الأول :
	(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
0.5 + 2 × 0.25	<ul style="list-style-type: none"> • حل المعادلة : $z^2 - 8z + 17 = 0$ - حساب المميز Δ : $\Delta = (-8)^2 - 4(1) \times (17) = -4$ أي $\Delta = (2i)^2$ - المعادلة تقبل حلين هما : $z_2 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ ، $z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4-i$ مجموعة الحلول : $S = \{4-i; 4+i\}$
	(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط D, B, A التي لواحقها على الترتيب $a = 4-i$ و $b = 4+i$ و $d = -i$. و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = 2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ (أ) بين أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$.
0.75	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$ - العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$ أي $z' - 2 = i(z - 2)$ ومنه $z' = i(z - 2) + 2 = iz + 2 - 2i$ إذن $z' = iz + 2 - 2i$
	(ب) تحقق أن للاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c = 1 + 2i$
0.25	<ul style="list-style-type: none"> • التحقق أن للاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c = 1 + 2i$ • لدينا : $R(B) = C$ يعني $c = i \times b + 2 - 2i = i(4+i) + 2 - 2i = 4i - 1 + 2 - 2i = 1 + 2i$ $c = 1 + 2i$
	(ج) بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان أن $\frac{c-d}{c-b} = -i$ - لدينا : $\frac{c-d}{c-b} = \frac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$ ومنه $\frac{c-d}{c-b} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i$

• استنتاج طبيعة المثلث BCD :

- لدينا : $\left| \frac{c-d}{c-b} \right| = |-i| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

- يعني $\frac{DC}{BC} = 1$ أي $DC = BC$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$

إذن المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين

0.25 + 0.25

(د) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها

• تبيان أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة :

المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط D, C, B تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي Ω .

ولدينا :

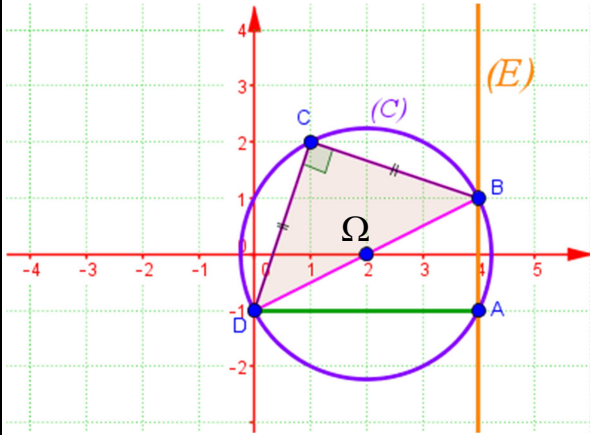
$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i|$$

$$\Omega A = \sqrt{5}$$

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{5}$

ومنه النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة

مركزها $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{5}$.



0.5

0.5

(ه) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ،

$$|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

• تعيين مجموعة النقط (E) من المستوي والتي تحقق : $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$:

$$MD^2 - MA^2 = 16 \text{ يعني } |-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

ولتكن النقطة I منتصف القطعة [DA]

$$\text{إذن لدينا : } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 16$$

$$\text{أي } \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{ID}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 = 16$$

$$\text{ومنه } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 16 \text{ لأن } \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} \text{ (I منتصف القطعة [DA])}$$

$$\text{وبالتالي : } 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}) = 16 \text{ أي } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AD} = 16$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$

$$\text{أي } \overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{DA} = 8$$

- ولدينا : $DA = |z_A - z_D| = |4 - i + i| = |4| = 4$ وبالتالي $IH = 2$

- وبالتالي H منطبقة على النقطة A.

$$\text{إذن } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ يعني } (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ أي } 8 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \text{ (لأن } H = A \text{)}$$

المجموعة (E) هي المستقيم العمودي على (DA) و المار من A أي

01

$$(E) = (AB)$$

أوبطريقة أخرى :

$$|-i-x-iy|^2 - |4-i-x-iy|^2 = 16 \text{ يعني } |-i-z|^2 - |4-i-z|^2 = 16$$

$$|-x+i(-1-y)|^2 - |4-x+(-1-y)|^2 = 16 \text{ ومنه :}$$

$$\text{أي } (-x)^2 + (-1-y)^2 - (4-x)^2 - (-1-y)^2 = 16 \text{ ومنه}$$

$$x^2 - 16 + 8x - x^2 = 16$$

$$\text{ومنه : } 8x = 32$$

وبالتالي : $x = 4$ المجموعة (E) هي المستقيم ذي المعادلة $x = 4$ العمودي على

$(x'x)$ والمار من النقطة A

التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$ و مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق،

$$MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

(1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P).

• تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) :

$$- \text{ لدينا : } AA^2 - \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \text{ ومنه } A \in (P)$$

0.5

(ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.

• تبيان أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له:

$$- \text{ لدينا : } MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \text{ يعني } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IM}) = 0$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \text{ أي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

المجموعة (P) هي مستو \overrightarrow{IA} شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A

- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AI}(1; -2; -1)$$

$$- \text{ معادلة (P) من الشكل } x - 2y - z + d = 0$$

- تعيين قيمة d : نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $2 - 2(1) - 1 + d = 0$

$$\text{ومنه } d = 1 \text{ أي معادلة (P) هي } x - 2y - z + 1 = 0$$

0.5

(2) لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة I وتمر من النقطة A .

تحقق أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R = \sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

0.5

• التحقق أن نصف قطر (S) هو $R = \sqrt{6}$:

- لدينا : $R = AI = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

- تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) :

0.5

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$$

(3) ليكن (P') المستوي ذي المعادلة $2x - y + z - 4 = 0$.

أ) بين أن (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

0.25

• تبين أن (P') قطع (S) وفق دائرة (C) :

- لدينا : $d(I, (P')) = \frac{|2(3) - (-1) + 0 - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

أي لدينا : $d(I, (P')) < R$ ومنه (P') قطع (S) وفق دائرة (C)

• تعيين مركز الدائرة (C) ونصف قطرها :

- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من I مركز سطح الكرة (S) والعمودي على (P') :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

0.75

- تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (P') :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{نحل لجملة :} \quad \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

إذن : $6t + 3 = 0$ ومنه $2(2t + 3) - (-t - 1) + t - 4 = 0$

$$H\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ أي } \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي } t = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P'))} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} : (C) \text{ حساب نصف قطر دائرة التقاطع}$$

ب) لتكن $B(2; -2; -2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

• التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C) :

0.5

$$- \text{ لدينا : } AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 2r$$

وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

• كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) :

- شعاع ناظمي للمستوي (Q) : $\vec{IB}(-1; -1; -2)$

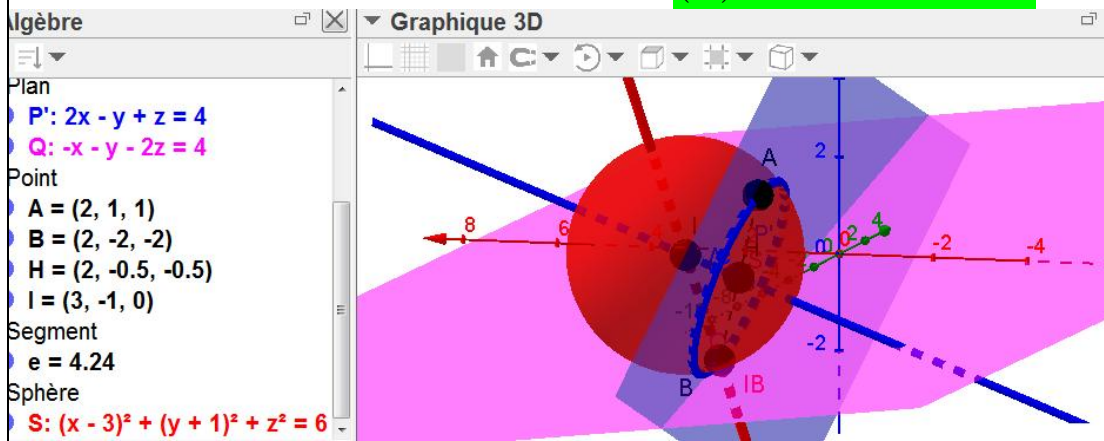
- معادلة (Q) من الشكل $-x - y - 2z + d = 0$

- لتعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة B نجد : $-(2) - (-2) - 2(-2) + d = 0$

$$\text{أي } d = -4$$

$$\text{إذن : } (Q) : -x - y - 2z - 4 = 0$$

0.5



التمرين الثالث :

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7.

0.75

• دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7:

- لدينا :

$$5^5 \equiv 3[7] \quad 5^4 \equiv 2[7] \quad 5^3 \equiv 6[7] \quad 5^2 \equiv 4[7] \quad 5^1 \equiv 5[7] \quad 5^0 \equiv 1[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7]$$

0.75	<p>- بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها $p = 6$</p> <p>- من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :</p> <table border="1" data-bbox="331 197 1423 304"> <tr> <td>n</td> <td>$6k$</td> <td>$6k+1$</td> <td>$6k+2$</td> <td>$6k+3$</td> <td>$6k+4$</td> <td>$6k+5$</td> </tr> <tr> <td>$5^n \equiv \dots [7]$</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3		
n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$											
$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3											
	<p>(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلا للقسمة على العدد 7</p>																
01	<p>• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$:</p> <p>- لدينا : $19 \equiv 5 [7]$ ومنه $19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3} [7]$ أي $19^{6n+3} \equiv 6 [7]$</p> <p>- ولدنا : $5^{6n+4} \equiv 2 [7]$</p> <p>- إذن : $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$ يكافئ $6 - 2 + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$ أي $4n^2 + 5 \equiv 0 [7]$</p> <p>ومنه : $4n^2 \equiv -5 [7]$ إذن $4n^2 \equiv 2 [7]$</p> <p>وبالتالي : $n^2 \equiv 4 [7]$</p> <table border="1" data-bbox="331 846 1423 967"> <tr> <td>$n \equiv \dots [7]$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>$n^2 \equiv \dots [7]$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> </table> <p>- ومنه : $n^2 \equiv 4 [7]$ يعني $n \equiv 2 [7]$ أو $n \equiv 5 [7]$</p> <p>أي $n = 7\alpha + 2$ أو $n = 7\alpha + 5$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$</p> <p>(3) N عدد طبيعي يكتب $1xx0$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث x عدد طبيعي . أ) عين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35.</p>	$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6	$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1
$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6										
$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1										
01	<p>• تعيين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35 :</p> <p>- لدينا : $N = 1 \times 5^3 + x \times 5^2 + x \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 125 + 30x$ مع $x < 5$</p> <p>وبالتالي N يقبل القسمة على 35 يعني $N \equiv 0 [35]$</p> <p>أي أن $N \equiv 0 [7]$ لان $N \equiv 0 [5]$ و 5 أولي مع 7</p> <p>وبالتالي $N \equiv 0 [7]$ يعني $125 + 30x \equiv 0 [7]$</p> <p>ومنه : $6 + 2x \equiv 0 [7]$</p> <p>يعني $2x \equiv -6 [7]$ أي $2x \equiv 1 [7]$</p> <p>وبالتالي : $x \equiv 4 [7]$</p> <p>أي $x = 7k + 4$ مع $x < 5$ إذن من أجل $k = 0$ نجد $x = 4$</p>																
	<p>ب) أكتب العدد N في النظام العشري .</p>																
0.5	<p>• كتابة العدد N في النظام العشري :</p> <p>$N = 125 + 30(4) = 245$ $N = 245$</p>																
التمرين الرابع :																	
	<p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right)$</p> <p>نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}).</p>																

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

• حساب نهايتي الدالة f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

0.25 + 0.25

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$ ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة f

• حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2x(3x) - 3(x^2 + 2)}{(3x)^2} = 1 + 3 \times \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{9x}{x^2 + 2} = 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x(x^2 + 2)}$$

0.75

وبالتالي: $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

$$\frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)} = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

ومنه $x-1=0$ أو $x^2 + 4x + 6 = 0$ (ليس لها حل لان $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$) مع $x \in]0; +\infty[$

ومنه $x=1$

0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2 + 4x + 6)$ لان $x(x^2 + 2) > 0$

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x^2+4x+6	+		+
$f'(x)$	-	0	+

- الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

• جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

- لدينا: $f(x) - y = x + 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) - x = 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ يعني $f(x) - y = 0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ أي $\frac{x^2+2}{3x} = 1$

- وبالتالي $x^2 + 2 = 3x$

إذن: $x^2 - 3x + 2 = 0$

- حساب المميز: $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$

المعادلة تقبل حلين متميزين هما: $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ ، $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

01

x	0	1	2	$+\infty$	
$f(x) - y$	+	0	-	0	+
		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	
		(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)		

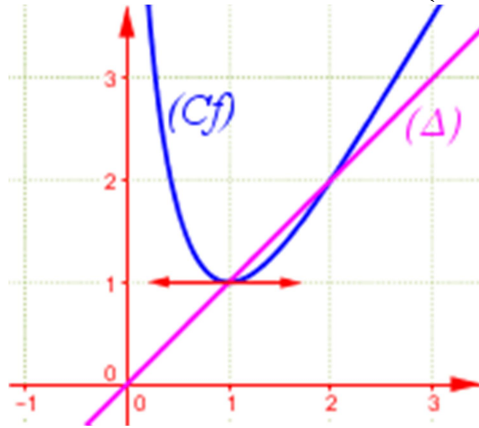
(5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f) .

• حساب $f(4)$:

0.25

$$f(4) = 4 + 3 \ln \left(\frac{16+2}{3 \times 4} \right) = 4 + 3 \ln \frac{18}{12} = 5.22 \quad -$$

• الرسم :



01

II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

• البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$:

- نسمي هذه الخاصية $P(n)$.

-1 من أجل $n = 0$ لدينا :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{إذن} \quad 1 < u_0 < 2 \quad \text{ومنه} \quad P(0) \text{ صحيحة.}$$

-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1 < u_n < 2$.

ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} < 2$

0.75

لدينا : $1 < u_n < 2$ ومنه $f(1) < f(u_n) < f(2)$ لان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; 2[$

- ومنه $1 < u_{n+1} < 2$ لان $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ أي $P(n+1)$ صحيحة .

- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

(2) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .

• دراسة رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

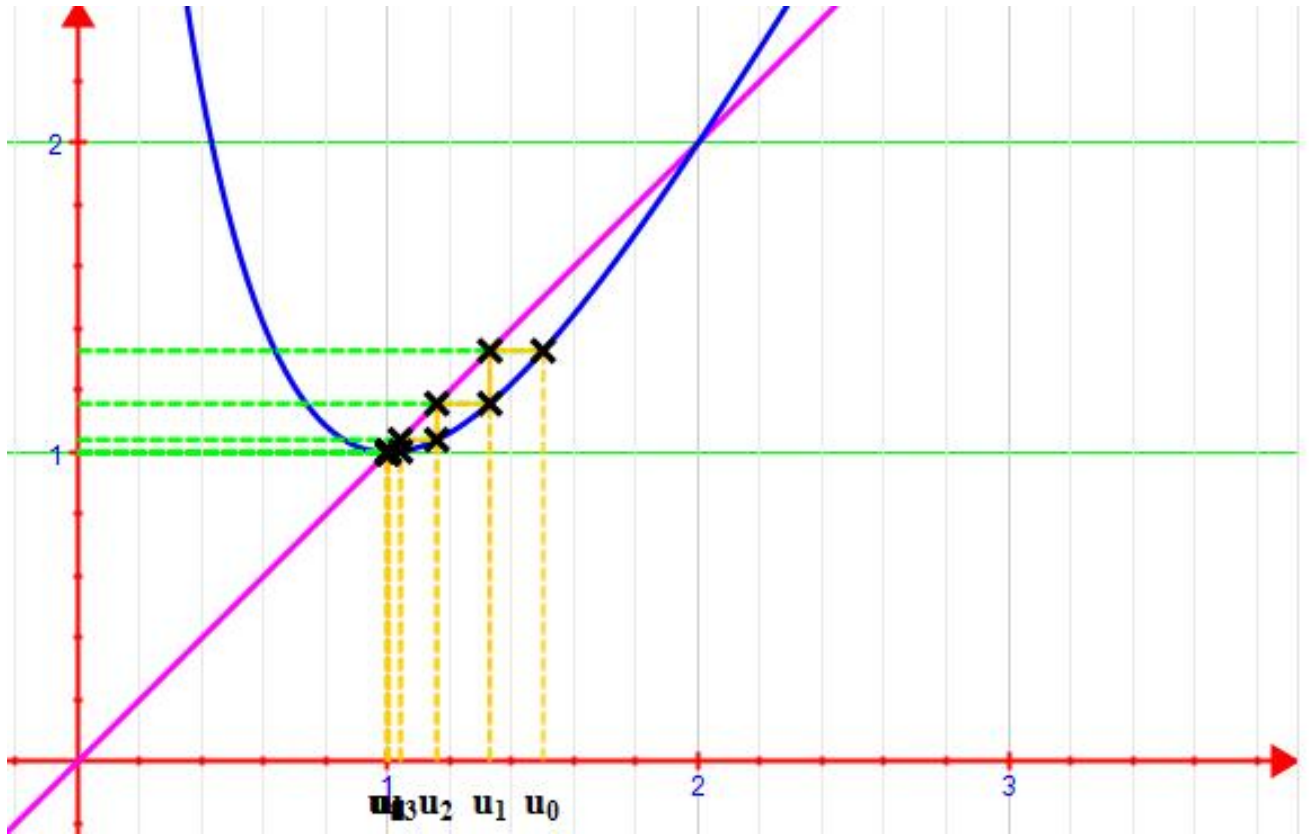
$$u_{n+1} - u_n = u_n + 3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) - u_n = 3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) \quad \text{لدينا :}$$

- بما أن $u_n \in]1; 2[$ فإن $3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) < 0$

من أجل $x \in]1; 2[$ فإن $f(x) - x < 0$ (السؤال (4))

0.5

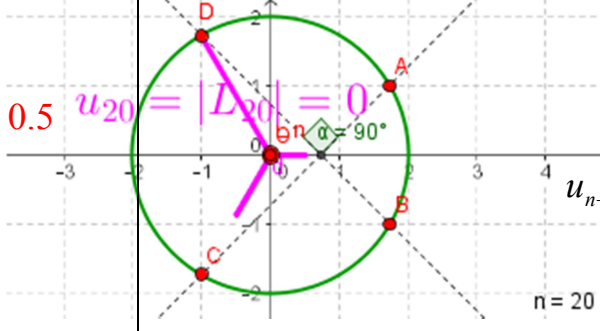
	وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة : - المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 . (3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
0.25	<ul style="list-style-type: none"> تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$



بالتوفيق و النجاح ☺ في البكالوريا 2015 ©

العلامة	التصحيح
05 نقاط	<p>التمرين الأول ☺☺☺</p> <p>(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :</p> $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$
0.5	<p>▪ حل المعادلة $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$:</p> <p>$z^2 + 2z + 4 = 0$ أو $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ يكافئ $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$</p> <p>▪ حل المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$</p> <p>حساب المميز : $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$</p> <p>المعادلة تقبل حلين هما : $z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} + i, z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$</p>
0.5	<p>▪ حل المعادلة $z^2 + 2z + 4 = 0$</p> <p>حساب المميز : $\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$</p> <p>المعادلة تقبل حلين هما : $z'' = \bar{z}' = -1 + i\sqrt{3}, z' = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$</p>
	<p>▪ مجموعة حلول المعادلة $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$:</p> $S = \{\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$
	<p>(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \bar{z}_A, z_C = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_D = \bar{z}_C$</p> <p>أ) أكتب الأعداد المركبة z_C, z_B, z_A و z_D على الشكل الأسّي</p>
0.5	<p>▪ كتابة الأعداد z_C, z_B, z_A و z_D على الشكل الأسّي:</p> <p>لدينا : $z_A = \sqrt{3} + i$</p> <p>حساب الطويلة : $z_A = \sqrt{3} + i = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$</p> <p>تعيين عمدة للعدد z_A نضع : $\theta = \arg(z_A)$</p> <p>لدينا : $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ أي $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$</p> <p>ولدينا : $z_B = \bar{z}_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$</p> <p>▪ $z_C = -1 - i\sqrt{3}$</p> <p>حساب الطويلة : $z_C = -1 - i\sqrt{3} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$</p>

0.5	<p>تعيين عمدة للعدد z_C : نضع : $\theta' = \arg(z_C)$</p> <p>إذن $z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ولدينا : $\begin{cases} \cos \theta' = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$</p> <p>ولدينا : $z_D = z_C = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$</p>
	<p>(ب) بين أن النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .</p>
0.25	<p>تبيان أن النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) : لدينا : $OA = OB = OC = OD = 2$ أي $z_A = z_B = z_C = z_D = 2$ ومنه النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز O ونصف قطرها $r = 2$</p>
	<p>(ج) بين أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم عين قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CA}, \overline{BD})$.</p>
0.5	<p>تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CA}, \overline{BD})$: لدينا : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{i^2(1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}$ $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{i(i(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}))}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = i \times \frac{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = i$ أي إذن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ تعيين قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CA}, \overline{BD})$: $(\overline{CA}, \overline{BD}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$</p>
	<p>ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD) ؟</p>
0.25	<p>الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD) : يعني $(\overline{CA}, \overline{BD}) = \frac{\pi}{2}$ $(AC) \perp (BD)$</p>
	<p>(3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث n عدد طبيعي . ونعرف العدد المركب L_n ب : $L_n = z_D \times z_n$ (أ) أكتب كلا من العددين L_1, L_0 على الشكل الجبري .</p>
	<p>كتابة كلا من العددين L_1, L_0 على الشكل الجبري : لدينا : $L_0 = z_D \times z_0 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^0} \times e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{3}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$</p>

0.5	$L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad L_0 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{إذن}$
	<p>(ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = L_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.</p> <ul style="list-style-type: none"> بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . لتكن النقط $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ على الترتيب . <p>أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\ + \ \overrightarrow{OM_1}\ + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$</p>
0.5	<p>تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية :</p> <p>لدينا : $u_n = L_n = z_D \times z_n = z_D \times z_n = 2 \times \frac{1}{2^n}$</p> <p>إذن : $u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2} u_n$</p> <p>أي $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$</p> <p>ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = L_0 = -1 + i\sqrt{3} = 2$</p> 
0.5	<p>حساب المجموع $S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\ + \ \overrightarrow{OM_1}\ + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\$:</p> <p>لدينا : $S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\ + \ \overrightarrow{OM_1}\ + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\ = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$</p> $S_n = 2 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ <p>$S_n = 4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$</p>
0.25	<p>حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:</p> <p>لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 4$</p>
04 نقاط	<p>التمرين الثاني ☺☺☺</p> <p>الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1; 2; 3), B(0; 1; 4), C(-1; -3; 2), D(4; -2; 5)$ والشعاع $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ حيث a, b عدنان حقيقيان .</p> <p>1. (أ) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا (ABC) .</p>
0.25 + 0.25	<p>تبيان أن النقط A, B, C تعين مستويا :</p> <p>لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; -5; -1)$</p>

0.25	<p>لدينا : $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{1}$</p> <p>إذن لا يوجد عدد حقيقي k بحيث يكون $\vec{AC} = k\vec{AB}$ ، ومنه النقط C, B, A ليست في استقامة فهي تعين مستويا.</p>
	<p>(ب) عين العددين الحقيقيين b, a بحيث يكون الشعاع \vec{n} ناظما للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).</p>
0.5	<p>■ تعيين العددين الحقيقيين b, a بحيث يكون الشعاع \vec{n} ناظما للمستوي (ABC):</p> <p>لدينا : $\vec{n}(2; a; b)$ ناظما للمستوي (ABC) يكافئ $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$</p> <p>يكافئ $\begin{cases} 2 \times (-1) - a + b = 0 \\ 2(-2) - 5a - b = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$</p> <p>يكافئ $\begin{cases} -a + b - 2 = 0 \dots (1) \\ -5a - b - 4 = 0 \dots (2) \end{cases}$</p> <p>■ بالجمع نجد : $-a + b - 2 - 5a - b - 4 = 0$ ومنه $-6a = 6$ أي $a = -1$</p> <p>■ من أجل $a = -1$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $b = 1$</p> <p>أي $\vec{n}(2; -1; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC)</p>
0.5	<p>■ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):</p> <p>■ معادلة (ABC) من الشكل $2x - y + z + d = 0$</p> <p>■ تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة $A(1; 2; 3)$ نجد : $2(1) - 2 + 3 + d = 0$ ومنه $d = -3$</p> <p>معادلة للمستوي (ABC) : $2x - y + z - 3 = 0$</p>
	<p>2. ليكن المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطى : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$</p> <p>(أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).</p>
0.25	<p>■ تبين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ):</p> <p>■ من أجل $(x; y; z) = (4; -2; 5)$ بالتعويض في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases} 4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t \end{cases}$</p> <p>ومنه $\begin{cases} 2t = -2 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ أي $t = -1$ ومنه $D \in (\Delta)$</p>

0.25	<ul style="list-style-type: none"> تبيان أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC): لدينا: $\vec{n}(2; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ولدينا: $\vec{u}(-2; 1; -1)$ شعاع توجيه (Δ) نلاحظ أن: $\vec{n} = -\vec{u}$ ومنه $\vec{n} \parallel \vec{u}$ أي $(\Delta) \perp (ABC)$
	<p>ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC):</p>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC): إحداثيات النقطة H هي حل للجملية: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ أي $2(2 - 2t) - (-1 + t) + (4 - t) - 3 = 0$ ومنه $-6t + 6 = 0$ وبالتالي $t = 1$ إذن: $H(0; 0; 3)$
	<p>ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).</p>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC): لدينا: $d(D, (ABC)) = DH = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ أو بطريقة أخرى: $d(D, (ABC)) = \frac{ 2(4) - (-2) + 5 - 3 }{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{ 12 }{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ $d(D, (ABC)) = 2\sqrt{6}$
	<p>د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC.</p>
0.25	<ul style="list-style-type: none"> تبيان أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC: H هي مركز ثقل المثلث ABC يعني $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$ لدينا: $\vec{HA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{HB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{HC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ أي $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$ ومنه النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC
	<p>3) أدرس تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (O, \vec{i}, \vec{j}).</p>
0.25	<ul style="list-style-type: none"> دراسة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (O, \vec{i}, \vec{j}): لدينا معادلة للمستوي (O, \vec{i}, \vec{j}) هي $z = 0$ ومنه شعاع ناظمي له هو $\vec{k}(0; 0; 1)$ ولدينا شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}(-2; 1; -1)$ إذن: $\vec{k} \cdot \vec{u} = 0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times (-1) = -1 \neq 0$ ومنه (Δ) لا يوازي (O, \vec{i}, \vec{j}) أي (Δ) يقطع (O, \vec{i}, \vec{j}) في نقطة F.

0.25

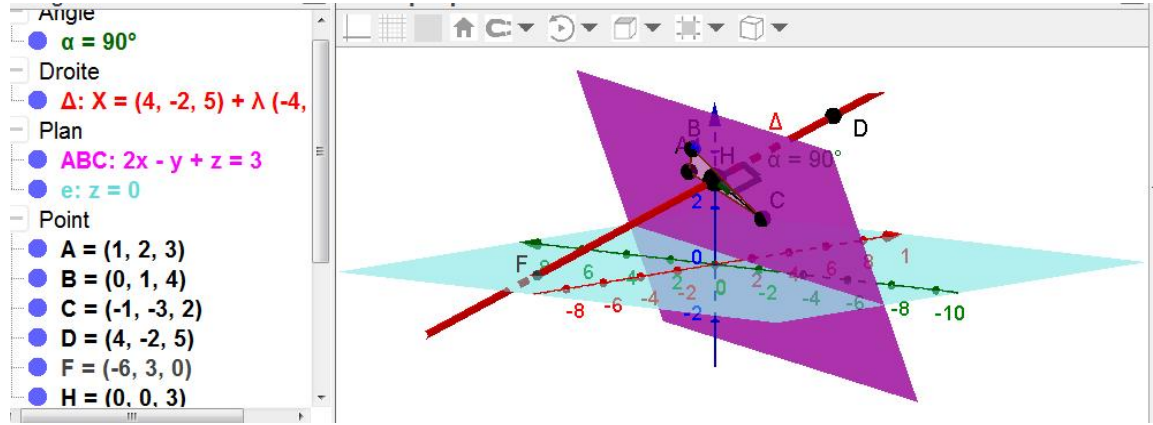
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

إحداثيات النقطة F هي حل للجملية :

أي $4 - t = 0$ ومنه $t = 4$ من أجل $t = 4$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيط لـ (Δ) نجد :

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

ومنه $F(-6; 3; 0)$



04 نقاط

التمرين الثالث ☺☺☺

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.

■ دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5:
لدينا :

$$2^4 \equiv 1[5] \quad 2^3 \equiv 3[5] \quad 2^2 \equiv 4[5] \quad 2^1 \equiv 2[5] \quad 2^0 \equiv 1[5]$$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p = 4$.
من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
باقي قسمة العدد 2^n على 5	1	2	4	3

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.

■ تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5:

■ لدينا : $2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3} \equiv 3[5]$

■ ولدينا : $2016^{8n} \equiv 1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n} \equiv 1[5]$

■ و $2014^{2n+1} \equiv 4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1} \equiv (2^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2}[5]$

وبالتالي $2014^{2n+1} \equiv 4[5]$

■ إذن $2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 3 - 2 \times 1 + 4[5]$

ومنه $2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 0[5]$

0.75

	أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5 هو 0
	(3) بين أن العدد 131 أولي .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> تبيان أن العدد 131 أولي : لدينا : $\sqrt{131} = 11.45$ العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$ $131 \equiv 10[11], 131 \equiv 5[7], 131 \equiv 1[5], 131 \equiv 2[3], 131 \equiv 1[2]$ ومنه العدد 131 أولي .
	(4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : <ul style="list-style-type: none"> $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$ حيث ، $d = PGCD(a, b)$ و $m = PPCM(a, b)$.
0.75	<ul style="list-style-type: none"> تعيين الأعداد n التي تحقق : <ul style="list-style-type: none"> $\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$ لدينا $ab = 5m$ ولدينا $ab = md$ ومنه $d = 5$ نضع : $a = 5a'$ و $b = 5b'$ مع $a' \wedge b' = 1$ (a' أولي مع b') إذن $ab = 5m$ يعني $5a' \times 5b' = 5m$ أي $m = 5a'b'$ وبالتالي : $3m + 7d = 2^n - 48$ معناه $3 \times 5a'b' + 7 \times 5 = 2^n - 48$ أي $5(3a'b' + 7) = 2^n - 48$ $3a'b' + 7$ طبيعي يعني $2^n - 48 \equiv 0[5]$ ومنه $2^n - 3 \equiv 0[5]$ أي $2^n \equiv 3[5]$ وبالتالي : $n = 4k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$
	(5) عين قيم n بحيث يكون ، $7 < n < 15$ ثم استنتج الثنائيات $(a; b)$.
0.5	<ul style="list-style-type: none"> تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون ، $7 < n < 15$ لدينا : $7 < n < 15$ معناه $7 < 4k + 3 < 15$ أي $4 < 4k < 12$ وبالتالي : $1 < k < 3$ إذن $k = 2$ ومنه $n = 11$
0.5	<ul style="list-style-type: none"> استنتاج الثنائيات $(a; b)$: من أجل $n = 11$ لدينا : <ul style="list-style-type: none"> $5(3a'b' + 7) = 2^{11} - 48$ ومنه $5(3a'b' + 7) = 2000$ أي $3a'b' + 7 = 400$ ومنه $a'b' = 131$ وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a'; b')$ $\{(131; 1), (1; 131)\}$ ومنه مجموعة الثنائيات $(a; b)$ $\{(655; 5), (5; 655)\}$
(07 نقاط)	التمرين الرابع ☺☺☺
	نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$ نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة الطول $2cm$)

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2xe^{2x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x)e^{2x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) = -\infty$

0.25 + 0.25

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

حساب المشتقة:

$f'(x) = -2e^{2x} + (1-2x) \times 2e^{2x} = (-2 + 2 - 4x)e^{2x} = -4xe^{2x}$

من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = -4xe^{2x}$

0.25

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

جدول اشارة المشتقة:

شارة $f'(x)$ من اشارة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$		$+$	$-$
$f'(x)$		$+$	$-$

0.25

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ ومنتقصية على المجال $[0; +\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow -\infty$

0.5

4) حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

حل المعادلة $f(x) = 0$:

$f(x) = 0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x} = 0$

يكافئ $1-2x = 0$ لأن $e^{2x} \neq 0$

يكافئ $x = \frac{1}{2}$

0.25

استنتاج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

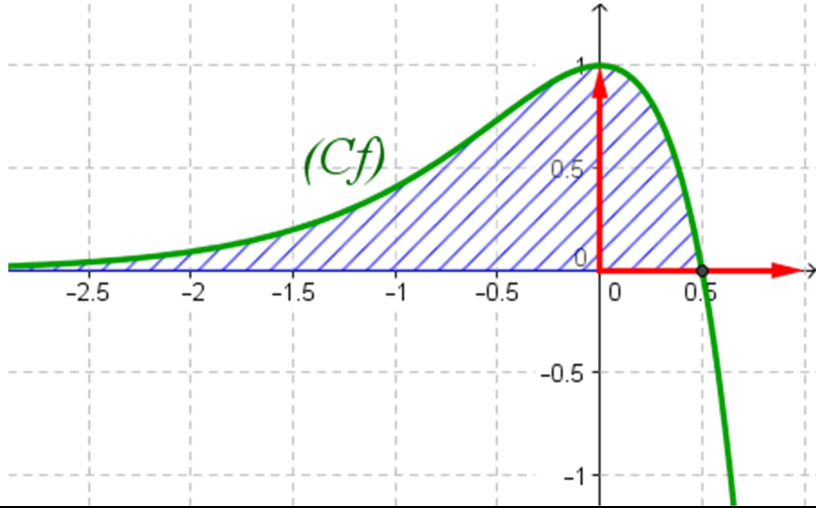
$(C_f) \cap (x'x) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 0 \right) \right\}$

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f) .

حساب $f(1)$:

$f(1) = (1-2(1))e^{2 \times 1} = -e^2 = -7.39$

الرسم :



0.25 + 0.5

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x) = f(m)$

مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x) = f(m)$:

حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ بيانها هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.
تغير قيم $f(m)$ حسب قيم m

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(m)$	0	1	0	$-\infty$

01

المناقشة :

- إذا كان $f(m) \in]-\infty; 0[$ أي $m \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
- إذا كان $f(m) = 0$ أي $m = \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x = \frac{1}{2}$.
- إذا كان $f(m) \in]0; 1[$ أي $m \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.
- إذا كان $f(m) = 1$ أي $m = 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

7) أ) عين العددين الحقيقيين b, a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

تعيين العددين الحقيقيين b, a :

F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} يعني $F'(x) = f(x)$ أي $ae^{2x} + (ax + b) \times 2e^{2x} = (1 - 2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax + a + 2b)e^{2x} = (1 - 2x)e^{2x}$ بالمطابقة نجد $\begin{cases} 2a = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ أي $F(x) = (-x + 1)e^{2x}$

0.5

	<p>(ب) أحسب بـ cm^2 وبدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x = \frac{1}{2}, y = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda < \frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$.</p>
0.5	<p>■ حساب $S(\lambda)$:</p> <p>f دالة مستمرة وموجبة على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ وبالتالي :</p> $S(\lambda) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = [F(x)]_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = [(-x+1)e^{2x}]_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}+1\right)e - (-\lambda+1)e^{2\lambda}$ $S(\lambda) = \left(\frac{1}{2}e + \lambda e^{2\lambda} - e^{2\lambda}\right) \times us = \left(\frac{1}{2}e + \lambda e^{2\lambda} - e^{2\lambda}\right) \times 4cm^2$ <p>أي $S(\lambda) = (2e + 4\lambda e^{2\lambda} - 4e^{2\lambda})cm^2$ ومنه</p>
0.25	<p>■ حساب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$:</p> <p>لأن $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (2e + 4\lambda e^{2\lambda} - 4e^{2\lambda}) = (2e)cm^2$</p> <p>$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 4\lambda e^{2\lambda} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2\lambda} = 0$</p>
	<p>II. نسمي $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ..., $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f.</p> <p>(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$.</p>
0.75	<p>■ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$.</p> <p>- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .</p> <p>(1) من أجل $n=1$ لدينا :</p> $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x} = -4xe^{2x} = f'(x)$ <p>ومنه $P(1)$ صحيحة .</p> <p>(2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$</p> <p>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن</p> $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x} = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <p>- لدينا : $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = 2^n \times [-2e^{2x} + (1-n-2x) \times 2e^{2x}]$</p> <p>ومنه $f^{(n+1)}(x) = 2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x} = 2^n \times 2(-n-2x)e^{2x}$</p> <p>أي : $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$</p> <p>ومنه $P(n+1)$ صحيحة.</p> <p>(3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.</p>
	<p>(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $(C_{f^{(n)}})$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n; y_n)$.</p> <p>(أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n.</p>

0.25 + 0.25	<p>▪ حساب x_n و y_n بدلالة n :</p> <p>- يقبل مماسا يوازي $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x) = 0$ أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x} = 0$ ومنه $-n-2x=0$ وبالتالي $x = -\frac{1}{2}n$ أي $x_n = -\frac{1}{2}n$ من أجل $x = -\frac{1}{2}n$ لدينا :</p> $y_n = f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right) = 2^n \left(1 - n - 2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right) e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)} = 2^n e^{-n} = (2e^{-1})^n$ <p>أي $y_n = (2e^{-1})^n$</p>
	<p>(ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.</p>
0.5	<p>▪ تبين أن (x_n) متتالية حسابية :</p> <p>- لدينا : $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(n+1) - \left(-\frac{1}{2}n\right) = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = -\frac{1}{2}$ ومنه (x_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\frac{1}{2}$ و حدها الأول $x_0 = 0$.</p> <p>- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}n\right) = -\infty$
	<p>(ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$</p>
0.5	<p>▪ تبين أن المتتالية (y_n) هندسية :</p> <p>- لدينا : $y_n = (2e^{-1})^n$ ومنه $y_{n+1} = (2e^{-1})^{n+1} = 2e^{-1} \times (2e^{-1})^n = 2e^{-1} \times y_n$ ومنه (y_n) هندسية أساسها $q = 2e^{-1}$ و حدها الأول $y_0 = 1$.</p> <p>- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$:</p> <p>لان $-1 < 2e^{-1} < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2e^{-1})^n = 0$</p>

✿ انتهى تصحيح الموضوع الثاني ✿ بالتوفيق 😊 والنجاح 😊 في البكالوريا 2015 ✿

