الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
ثانوية معوش إدريس
وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
دورة : ماي 2015
الشعبة : رياضيات
اختبار في مادة : الرياضيات
المدة : 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

-1 نعتبر المعادلة : $(E): 4x - 5y = 1$

- حل ، في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

-2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a = 4n + 3$ ، $b = 3n + 1$ و $PGCD(a;b) = d$

- عين القيم الممكنة لـ d
- برهن أنه إذا كان $d = 5$ فان $n \equiv 3[5]$
- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5
- أوجد أصغر عدد طبيعي $n > 2015$ حيث : $\begin{cases} 2^a + 3^b \equiv 0[5] \\ PGCD(a;b) = d \end{cases}$

-3 α ، β و γ أعداد طبيعية حيث $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ و لتكن المعادلة التالية :

$$(E'): x^2 - (\beta + \gamma)x + \gamma \times \beta = 0$$

- برهن أن β و γ هما حلان لـ (E')
- عين الأعداد الطبيعية α ، β و γ علما أن في النظام ذي الأساس α يكون : $\beta + \gamma = \overline{46}$ و $\beta\gamma = \overline{545}$

التمرين الثاني : (05,50 نقاط)

ليكن $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ، نعتبر P مركز ثقل المثلث HGF و Q مركز ثقل المثلث FBG ، المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

-1

- أعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (BH)
- جد المعادلة الديكارتية للمستوي (ACF)
- عين النقط W من المستقيم (BH) بحيث يكون حجم الرباعي الوجوه $ACFW$ يساوي إلى $\frac{11}{6}$

2- لتكن K منتصف القطعة $[FG]$ و h التحاكي الذي مركزه K ونسبته $\frac{1}{3}$
- برهن أن : $h(H) = P$ و $h(B) = Q$
- أعط العبارة التحليلية لتحاكي h
3- (R) مستوي معادلته : $-x + y + z - \frac{1}{3} = 0$
- برهن أن المستوي (R) هو صورة المستوي (ACF) بالتحاكي h
- برهن أن المستقيم (BH) عمودي على المستوي (ACF) في النقطة N يطلب تعيين إحداثياتها ثم استنتج أن المستوي (R) عمودي على المستقيم (PQ) في النقطة N' يطلب تعيين إحداثياتها
4- أعط المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) مماس للمستويين (R) و (ACF) بحيث مركزها ينتمي إلى المستقيم (NN')

التمرين الثالث : ($04,50$ نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد مركب Z بـ : $f(Z) = \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})Z + 2\bar{Z}\right)$ حيث $\bar{Z}$ مرافق Z .

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $f(Z) = 0$

2- نضع : $Z_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $Z_{n+1} = f(Z_n)$ و نرمز بـ u_n لطويلة العدد المركب Z_n

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$
- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3- k عدد طبيعي، M_k صورة العدد المركب Z_k ، نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} OM_k$$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3$
- بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متقاربة (حساب نهاية المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ غير مطلوب)

4- نضع : $Z = re^{i\theta}$ حيث : $\theta \in]-\pi; \pi]$ و r عدد حقيقي موجب تماما .

- بين أن : $f(Z) = \frac{2}{3} r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{\pi}{6}i}$
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n النقط $M_1, M_2, \dots, M_n$ في استقامية .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}-log(x)$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، (وحدة الرسم $1cm$)

1- أحسب : $\lim_{x \to 0} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2- أحسب : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3-

- أحسب f' الدالة المشتقة لدالة f
- شكل جدول تغيرات الدالة f

4-

- برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$
- تحقق أن : $\alpha\in]2;3[$ و $log(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$

5- أرسم المنحنى (C_f)

6-

- عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$
- أحسب القيمة المتوسطة لدالة f على المجال $[1;2]$
- $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\alpha$ و $x=1$ ، أحسب $S(\alpha)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04.50 نقاط)

1- $\alpha \in [0;\pi]$ نضع من أجل كل عدد مركب Z :

$$P(Z) = Z^3 - (1-2sin\alpha)Z^2 + (1-2sin\alpha)Z - 1$$

- أحسب $P(1)$
- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $P(Z) = 0$ ثم أكتب حلولها على الشكل الأسي .

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ و Ω نقطة ذات اللاحقة 3
نعتبر التحويل f_α الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث :

$$Z' = (cos\alpha + i\,sin\alpha)Z + 3(1 - cos\alpha - i\,sin\alpha)$$

- برهن أن التحويل f_α تقايس
- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي α من $]0;\pi]$ للتحويل f_α نقطة صامدة يطلب تعيينها
- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي α من $]0;\pi]$ التحويل f_α دوران يطلب تعيين عناصره المميزة

التمرين الثاني : (04.50 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بمايلي :

$$f_n(x) = -nx + lnx$$

-1

- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ $f_n'(x) = \frac{-nx+1}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات f_n

-2

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $2x - 1 > lnx$
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المعادلة : $f_n(x) = -2n$ تقبل بالضبط حلين اثنين u_n و v_n بحيث : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$ و $v_n > 2$

3- أحسب نهاية $(u_n)_{n\geq1}$ معللا جوابك ثم أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e^2}$

-4

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $f_{n+1}(v_n) < -2(n+1)$ ثم استنتج رتابة $(v_n)_{n\geq1}$
- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متقاربة ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n(v_n-2)}{\ln 2}\right]$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(5;-5;2)$ ، $B(-1;1;0)$ ، $C(0;1;2)$ و $D(6;6;-1)$

1- عين طبيعة المثلث BCD ثم أحسب مساحته .

-2

- برهن أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي ~~(B)~~ (BCD)
- استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (BCD)

3- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على (BCD) والمار من النقطة A

4- عين إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (BCD)

5- عين حجم $ABCD$

6- نفرض أن $AB=\sqrt{76}$ و $AC=\sqrt{61}$

- عين القيمة المقربة إلى 10^{-2} للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ بالدرجة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

$I-$ f الدالة العددية المعرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x\ln x}{x+1} & ;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

-1

- برهن أن الدالة f مستمرة في 0
- أدرس اشتقاقية الدالة f في 0 ثم أول النتيجة هندسيا .

2- g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x+1+\ln x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$
- برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\propto>0$ حيث : $g(\propto)=0$ ثم تحقق أن : $0{,}27<\propto<0{,}28$
- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

-3

- برهن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:
$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
- بين أن : $f(\propto)=-\propto$
- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

- جد المعادلة الديكارتية (T) المماس المنحنى (c_f) عند النقطة التي فاصلتها 1
- أرسم المنحنى (c_f) و المماس (T)

$II-$ F الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_1^{2x} f(t)dt$

1- برهن أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ثم أحسب $F'(x)$

2- x عدد حقيقي موجب .

- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[1;x]$: $\frac{1}{2}\ln t \leq f(t) \leq t\ln t$
- أحسب التكاملات التالية : $I(x) = \int_1^{2x} \ln t\, dt$ و $J(x) = \int_1^{2x} t\ln t\, dt$
- استنتج أن : $x\ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2\ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$
- أحسب : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

3- تعطى $F(0) \approx 0{,}2$ ، شكل جدول تغيرات الدالة F

بالتـــــــوفيق للجميـــــــــع

***** عطـــــــلة سعيـــــدة و بالتوفيـــــــق في البكالوريا للجمـــــيع *****