الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة: رياضيات

مديرية التربية لولاية بومرداس
دورة : ماي 2015
ثانوية بني عمران الجديدة

إختبار في مادة الرياضيات — **المدة: 4 ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الاول

التمرين الأول:(4ن)

x و y عددان صحيحان. نعتبر المعادلتين ذات المجهول $(x;y)$ التاليتين:

$$2905x + 2490y = 32785 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$7x + 6y = 79 \quad \ldots\ldots(2)$$

1) أ) احسب: $PGCD(2905, 2490, 32785)$.
   ب) استنتج ان المعادلتين (1) و (2) متكافئتان.
2) أ) عين (x_0, y_0) حل المعادلة (2) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = 0$.
   ب) استنتج حلول المعادلة (2).
3) اشترت شركة (الجزائرية للمياه) لمدينتنا ملابس لعمالها.
   فإذا علمت ان ثمن بذلة العامل هو 2905 DA و ثمن بذلة العاملة هو 2490 DA و أن مقتصد الشركة دفع 32785 DA ثمن الملابس.
   - ماهو عدد العاملين و العاملات الذين استفادو من هذه العملية.

التمرين الثاني:(5ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3,0,10)$ ، $B(0,0,15)$ ، $C(0,20,0)$

1) أ)عين تمثيلا و سيطيا للمستقيم (AB) ثم بين انه يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $E(9,0,0)$.
   ب) تحقق ان النقط A ، B و C ليست في استقامية.
2) ليكن (OH) الإرتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث OBC.
   أ. بين ان (BC) عمودي على (OEH) ثم استنتج ان (EH) ارتفاع (EBC) .
   ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (OEH) .
   ج. تحقق ان معادلة المستوي (ABC) هي: $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.
   د. بين ان الجملة: $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ تقبل حلا واحدا . ماذا يمثل هذا الحل؟.
   ه. بين ان $EH = 15$ ثم احسب مساحة المثلث EBC.

التمرين الثالث:(5ن)

1) α عدد حقيقي حيث $0 \leq \alpha \prec \pi$.

أ. حل في C المعادلة: $Z^2 - 4(1+\cos\alpha).Z + 8(1+\cos\alpha) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$

ب. نرمز بـ: Z_1 و Z_2 الى حلي المعادلة (E).

- أوجد بدلالة $\frac{\alpha}{2}$ طويلة و عمدة كل من Z_1 و Z_2 .

- عيّن قيمة α حتى يكون : $Z_1 \times Z_2 = 8$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $i\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$ ، $-\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{2}$.

أ. أكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_A}$.

ب. استنتج زاوية الدوران R الذي يحول A الى B و يحوّل C الى A.

3) نسمي (Ω) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\alpha^2$.

أ. تحقق ان النقط A، B و C تنتمي الى المجموعة (Ω).

ب. عيّن طبيعة المجموعة (Ω) و عناصرها المميزة.

التمرين الرابع:(6ن)

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة: 4cm.

I. نعتبر الدالة العددية g و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - xe^x$

1. عين نهاية الدالة g عند $+\infty$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ. بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ يحقق $0 \leq \alpha < 1$ ثم استنتج أنّ : $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) بين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f).

2) أ- بين أنّ f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ثم تحقق ان: $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

ب- بين أنّ $f(\alpha) = \alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ – بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\frac{g(x)}{e^x+1}$.

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$.

III. 1) بين انه اذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن $f(x)\in[0;\alpha]$.

2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N بـ:

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$$

أ. باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (d) مثل على محور اللفواصل الحدود: U_0، U_1 ، U_2 و U_3 دون حسابها.

ب. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le U_n\le U_{n+1}\le\alpha$.

ج. استنتج ان المتتالية (U_n) متقاربة و جد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (4ن)

1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5.

2) U_0 ، r عددان طبيعيان غير معدومين.

(U_n) متتالية حسابية حدها الاول U_0 و اساسها r.

◆ عين U_0 و r علما ان U_0 و r أوليان فيما بينهما و $U_0^2 = U_{10} - U_1$.

3) نضع $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ و $P_n = U_0 \times U_1 \times ... \times U_n$.

أ. احسب S_n و P_n بدلالة n.

ب. عين العدد q بحيث: $2! \times P_q = 40320$ ثم تحقق أن : $3^q \equiv 3[5]$

ج. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 3 \equiv 3^q[5]$.

التمرين الثاني: (5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(Z + 4i)(4Z^2 - 2Z + 1) = 0$.

2) نعتبر العدد المركب Z حيث: $Z = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

أ. اكتب على الشكل المثلثي كل من العددين Z و $\overline{Z}$.

ب. نضع $L_K = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^K - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^K$ حيث K عدد صحيح نسبي.

◆ بين ان: $L_K = \left(\frac{1}{2^{K-1}}\sin\frac{K\pi}{3}\right)$ ثمّ استنتج قيمة L_{2015}.

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $Z_A = 2 + 2\sqrt{3}i$ ، $Z_B = 2 - 2\sqrt{3}i$ و $Z_C = \frac{3}{2}Z_A + Z_B$ على الترتيب.

أ. عين Z_C ثم علم النقط A ، B و C.

ب. اكتب العدد المركب $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الاسي. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC مع التعليل.

ج. عين نسبة و زاوية التشابه S الذي يحوّل A الى B و مركزه C.

د. عين Z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيل.

التمرين الثالث:(5ن)

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(12;7;-13)$ ، $B(3;1;2)$ و المستوي (P) الذي يشمل النقطة B و $\vec{n}(3;2;-5)$ شعاع ناظمي له.

و المستوي (P') ذو المعادلة : $x+y-2z=0$.

1) بين ان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.

2) اثبت ان النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3) ليكن (Q) المستوي و المعرّف بالتمثيل الوسيطي.

$$\begin{cases} x = 2t - 2\lambda + 6 \\ y = 2t + 3\lambda + 5 \\ z = 2t - 6 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (t,\lambda) \in R^2$$

أ. بين أن المستويين (P) و (Q) متوازيان.

ب. تحقق أن المعادلة $3x+2y-5z=5$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

ج. لتكن I منتصف $[BA]$.

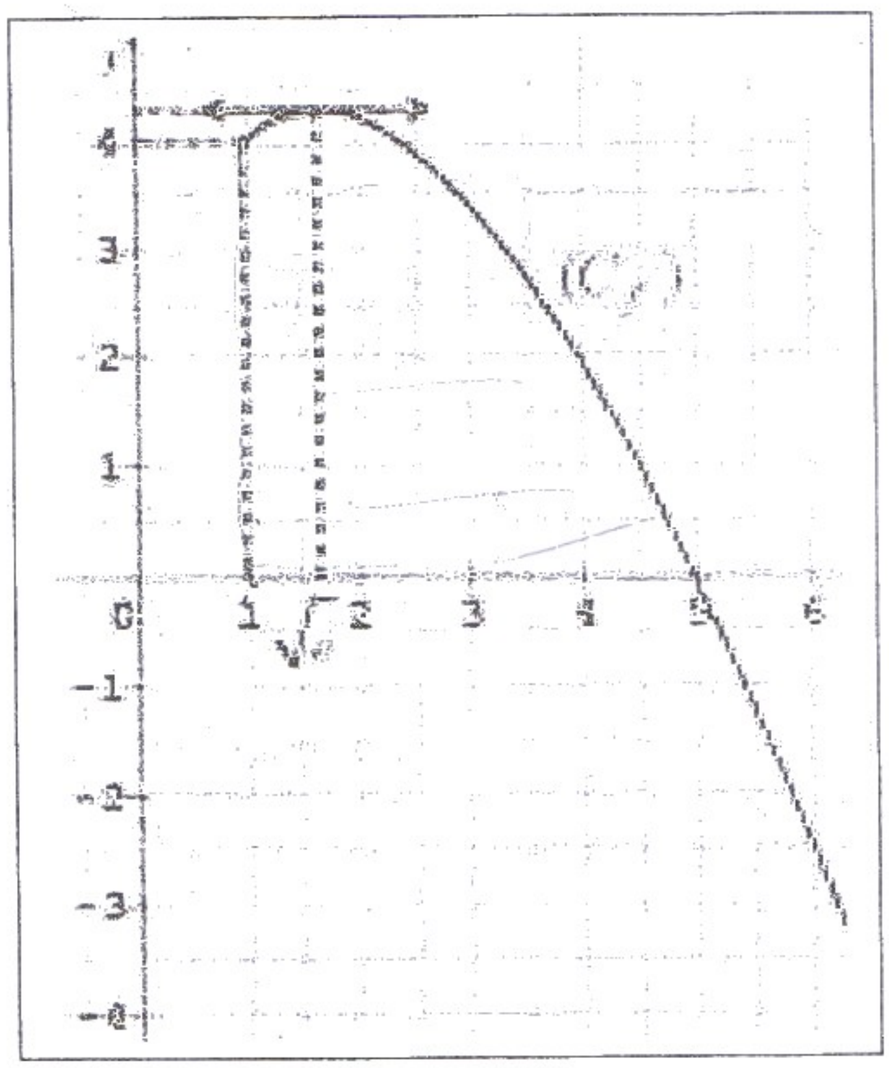
تحقق أن I تنتمي إلى المستوي (Q) ثم استنتج أن المستوي (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[BA]$.

4) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

أ. بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تحديد عناصرها المميزة.

ب. استنتج أن المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

التمرين الرابع:(6ن)



التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=ax+b+cx\ln x$

حيث a ; b ; c أعداد حقيقية .

1. خمن بالقراءة البيانية اتجاه تغيرات الدالة f و نهاية f عند $+\infty$.

2. احسب بدلالة a ; b ; c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

باستعمال المعطيات في الشكل و علما أن $f(5)=16-10\ln 5$.

- عين الاعداد الحقيقية a ; b ; c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

- تحقق من صحة تخمينك في السؤال الاول ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيدا α على المجال $]1;+\infty[$ ثم تحقق أن $4,95<\alpha<4,96$.

4. نعتبر للدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ هي دالة اصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

- اشرح لماذا يكون المماس للمنحنى الدالة g موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

- حدد اتجاه تغيرات الدالة g على $]1;+\infty[$ و بين ان (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب فاصلتها.

- بين ان عبارة الدالة g على المجال $]1;+\infty[$ هي $g(x)=2x^2+x-x^2\ln x$.

5. نعرف العدد S الحقيقي كما يلي $S=\int_1^{\alpha} f(x)dx$ حيث α هو حل المعادلة $f(x)=0$.

- اعطي تفسيرا هندسيا للعدد S ثم احسبه بدلالة α .

- بين ان $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$ ثم استنتج حصرا للعدد S.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا