الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
ثانوية : بابا أحسن
امتحان تجريبي بكالوريا التعلم الثانوي
ثانوية : زوبيدة ولد قابلية – الدرارية –
الشعبة : رياضيات
دورة : ماي 2015

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، لتكن النقطة $A(-2,8,4)$ و الشعاع $\vec{U}(1,5,-1)$.

1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل A و $\vec{U}$ شعاع توجيه له .

2) ليكن المستويين (P) و (Q) حيث : $(P)...\quad x-y-z=7 \quad ; \quad (Q)...\quad x-2z=11$

أ) بين أن (P) و (Q) متقاطعان و عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (d').

ب) بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوى.

3) عين إحداثيات نقطة H من (d) و H' من (d') بحيث تكون HH' المسافة بين المستقيمين (d) و (d').

4) نضع $H(-3,3,5)$ و $H'(3,0,-4)$.

ث) عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\overline{MH'}.\overline{HH'}=126$.

ج) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز H و تمس المستقيم (d').

- أكتب معادلة سطح الكرة (S).

التمرين الثاني : (4 نقاط)

- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(Z^2-6Z+34)(\overline{Z}+1+3i)=0$.

1) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر C,B,A و D لواحقها على الترتيب :

$Z_A=3+5i,\quad Z_B=3-5i,\quad Z_C=7+3i,\quad Z_D=-1+3i$

- أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي حيث : $L=\dfrac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$.

2) ما نوع التحويل النقطي S_1 الذي مركزه C و يحول النقطة A إلى B يطلب تعين عناصره المميزة ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) عين تشابه مباشر S_2 الذي مركزه D و يحول النقطة A إلى B مع تحديد عناصره المميزة ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

4) عين طبيعة التحويل S_2oS_1 ثم عين عناصره المميزة .

5) بين أن النقط C,B,A و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعين مركزها و نصف قطرها .

6) M نقطة من المستوي لاحقتها Z ، عين مجموعة النقط M من المستوي في كل من الحالتين :

أ) $(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD})(\overline{AB})=0$.

ب) $|Z-Z_A|^2+|Z-Z_B|^2+|Z-Z_C|^2+|Z-Z_D|^2=100$.

التمرين الثالث : (3 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية معرفتان ب : $\begin{cases} x_0=3 \\ x_{n+1}=2x_n-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0=1 \\ y_{n+1}=2y_n+3 \end{cases}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n=2^{n+1}+1$.

2) أحسب : $p\gcd(x_8, x_9)$ ، ما القول عن x_8 و x_9 ؟

3) هل العددين x_n و x_{n+1} أوليين فيما بينهما من أجل كل عدد طبيعي n ؟

4) عين $p\gcd(x_{2014}, x_{2015})$.

5) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2x_n - y_n = 5$.

ت) عبر عن y_n بدلالة n .

6) أدرس حسب قيم p باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5 .

7) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $d_n = p\gcd(x_n, y_n)$

- برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ، استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها : $p\gcd(x_n, y_n) = 1$

التمرين الرابع : (6 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\Re$ كما يلي : $f_m(x) = \dfrac{e^{mx} - 1}{2e^x}$ حيث m وسيط حقيقي $(m \geq 1)$ و (C_m) تمثلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعينها .

2) أحسب حسب قيم m نهايات الدالة f_m عند $+\infty$ و $-\infty$.(نميز حالتين $m = 1$ و $m > 1$)

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f_m ثم شكل جدول تغيراتها .

II) نضع $m = 2$.

1) شكل جدول تغيرات الدالة f_2 و استنتج حسب قيم x إشارة $f_2(x)$.

2) بين أن (C_2) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_2) عندها .

3) g دالة عددية معرفة على $\Re$ كما يلي : $g(x) = f_2(x) - x$

أ) أحسب $g(0)$.

ب) أدرس تغيرات الدالة g' ثم استنتج تغيرات الدالة g . دون حساب النهايات

ت) استنتج وضعية المنحنى (C_2) بالنسبة إلى (T) .

ث) أرسم (C_2) و المماس (T) .

ج) λ عدد حقيقي موجب تماما . أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوى المحدود بالمنحنى (C_2) و المستقيم (T) و المستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = \lambda$.

III) h دالة عددية معرفة على $\Re$ كما يلي : $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

و ليكن (δ) تمثلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم السابق .

1) بين أن النقط $M'(y, x)$ تنتمي إلى المنحنى (δ) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى المنحنى (C_2) .

2) ما ذا تستنتج بالنسبة إلى المنحنيين (δ) و (C_2) .

3) أرسم (δ) في نفس المعلم السابق .

التمرين الخامس : (3 نقاط)

في مدينة 20% من الأشخاص لديهم حاسوب ، 90% منهم يستعملون الانترنت و 60% من الأشخاص الذين ليس لديهم حاسوب يستعملون الانترنت . نختار عشوائيا شخصا من المدينة .

نرمز ب : A إلى الحادثة : " الشخص المختار لديه حاسوب "

B إلى الحادثة : " الشخص المختار يستعمل الانترنت "

1) شكل شجرة الاحتمالات

2) ما هو احتمال أن يكون الشخص المختار ليس لديه حاسوب و لا الانترنت ؟

3) أحسب $P(\overline{A} \cap B)$ و $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(B)$.

4) علما أن الشخص المختار يستعمل الانترنت .ما احتمال أن يكون لديه حاسوب ؟

أتمنى لكم التوفيق و النجاح في البكالوريا

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر C,B,A ذات اللواحق :

$Z_A=(3\sqrt{3}-2)+i(3+2\sqrt{3})$, $Z_B=(-1-\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$, $Z_C=(-4\sqrt{3}+1)+i(-\sqrt{3}-4)$

1) أعط العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O مبدأ المعلم و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

2) تحقق أن التحويل R يحول النقطة A إلى النقطة A' ذات اللاحقة $4-6i$.
و نقبل أنه يحول النقط B,C إلى B',C' ذات اللواحق على الترتيب : $2+2i,-2+8i$

- أنشئ النقط A',B',C' ثم باستخدام المدور لإنشاء A,B,C مع الشرح .

3) أحسب $Z_A-Z_B+Z_C$

- استنتج أن O مبدأ المعلم هو مرجح للنقط A,B,C المرفقة بالمعاملات 1 ، 1- ، 1 على الترتيب .

4) نعرف المجموعة (Ω) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى مجموعة (Ω) .
- تعرف على هذه المجموعة (Ω) .

التمرين الثاني : (6,5 نقاط)

1) جد القاسم المشترك الأكبر $pgcd(16120,18135)$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلتين حيث x و y عددان صحيحان :

$(1).........16120x+18135y=-20150$ و $(2).........8x+9y=-10$

أ) بين أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان .

ب) جد حلا خاصا للمعادلة (2) ثم حل عندئذ في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2) .

3) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، ليكن المستويان (P) و (Q) المعرفان بمعادلتهما على الترتيب : $(P).....x+2y-z+2=0$ و $(Q).....3x-y+5z=0$.

أ) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (D) .

ب) عين إحداثيات نقط المستقيم (D) و التي تحقق المعادلة (2) .

ت) حدد المجموعة (Γ) مجموعة النقط من (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

4) نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي ب $\begin{cases}x=-1+4t\\y=6+t\\z=2+4t\end{cases}$ حيث : $t\in\mathbb{R}$.

و ليكن العدد الطبيعي N الذي يكتب في النظام ذو الأساس 8 على الشكل $N=\overline{\alpha\beta\alpha\gamma}$ وفي النظام ذو الأساس 9 على الشكل $N=\overline{2\gamma\beta\beta}$.

أ) عين الأعداد الطبيعية β,α و γ بحيث تكون النقطة (α,β,γ) نقطة من المستقيم (Δ) ثم أكتب العدد N في النظام العشري .

ب) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متعامدان و ليسا من نفس المستوي .

ت) عين معادلة المستوي (π_1) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يعامد المستقيم (D) .

ث) عين معادلة المستوي (π_2) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (D) .

التمرين الثالث : (6,5 نقاط)

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b$ و f و g دالتا ن مستمرتان على المجال $[a,b]$.

نعلم أن : $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(x)dt .....(1)$ ومن أجل كل $t\in[a,b]$ ، $f(t)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(t)dt \geq 0 ....(2)$

1) بين من أجل كل $t\in[a,b]$ ، $f(t)\leq g(t)$ فإن $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

2) لتكن n عدد طبيعي غير معدوم ، f_n دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب : $f_n = \ln(1+x^n)$

و نضع $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ و (C_n) منحنى الممثل لدالة f_n في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) عين نهاية ل f_1 عند $+\infty$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f_1 على المجال $[0,+\infty[$.

ت) بين أن الدالة الأصلية لدالة $x\mapsto \ln(1+x)$ على $[0,1]$ هي الدالة $x\mapsto (1+x)\ln(1+x)-x$ على $[0,1]$.

ث) أحسب I_1 و فسر النتيجة بيانيا .

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\leq I_n \leq \ln 2$.

أ) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (I_n).

ب) استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة .

4) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب : $g(x)=\ln(1+x)-x$

أ) أدرس اتجاه تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$. بدون حساب النهايات

ب) استنتج إشارة g على المجال $[0,+\infty[$.

ت) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، و من أجل كل x عدد حقيقي موجب : $\ln(1+x^n)\leq x^n$.

ث) استنتج نهاية المتتالية (I_n)

التمرين الرابع : (3 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ،1 ، 2 و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ،1 ، 2 ، 2 و 5 كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ،2 ، 2 ، 2 ، 3 .

- نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

1) نعتبر الحادثتين A " السحب كرتين من نفس اللون " و B " سحب كرة خضراء على الأقل " .

أ) أحسب احتمال كل من الحوادث : A ، B و $A\cap B$.

ب) هل الحادثان A و B مستقلتان ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين .

أ) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

أتمنى لكم التوفيق و النجاح في البكالوريا