الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية ركايزي احمد . حبوط

المستوى : السنة الثالثة رياضيات — المدة : 4 ساعات و 30 د

بكالوريا تجريبي في الرياضيات

« دورة ماي 2015 »

الموضوع الأول

التمرين الأول (8 نقط)

I - لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$ و (C) تمثيلها البياني بالنسبة لمستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$.

1) عين النهايات عند كل من 0 و $+\infty$.
2) أحسب $f'(x)$ ثم بين أنها من إشارة : $\ln x.(2-\ln x)$. شكل جدول التغيرات .
3) أنشئ المنحنى (C) .
4) من أجل $p\geq 1$ ، نضع : $I_p=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}dx$

a) باستعمال التكامل بالتجزئة ، أحسب التكامل $I_1=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$

b) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $p\geq 1$: $I_{p+1}=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1).I_p$

c) أحسب ، عندئذ التكاملات : I_4,I_3,I_2 .

d) أحسب الحجم V للمجسم الناتج بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل في المجال $[1;e^2]$.

II- ليكن α العدد الحقيقي الموجب تماما α و A نقطة من المنحنى (C) ذات الفاصلة α .

1) عين معادلة المماس (T_α) للمنحنى (C) عند النقطة A .
1) عين قيم العدد α التي من أجلها (T_α) تمر بالمبدأ O .
2) أعط ، عندئذ ، معادلة لكل مماس (T_α) المار بالمبدأ O . أرسم هذه المماسات.

III - نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=\frac{1}{e^2}x$.

1) من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، نضع $h_1(x)=x-e\ln x$.
بين أن الدالة h_1 متزايدة تماما على المجال $]e;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;e[$.
2) من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، نضع $h_2(x)=x+e\ln x$

a) أدرس تغيرات الدالة h_2 على المجال $]0;+\infty[$.

b) أثبت أن المعادلة $h_2(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

c) استنتج أن المعادلة $h_2(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

3) عين نقط تقاطع المنحى (C) و المستقيم (Δ) .

التمرين الثاني : (4 نقط)

1) حل في المجموعة C المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.
نرمز بـ z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الآخر.

2) عين الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية : z_1 ، z_2 و $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $1cm$) ، نعتبر النقط التالية :
M_1 التي لاحقتها $\sqrt{2}(1+i)$ ، M_2 التي لاحقتها $\sqrt{2}(1-i)$ و A التي لاحقتها $z_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a) عين لاحقة النقطة M_3 صورة النقطة M_2 بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -3 .

b) عين لاحقة النقطة M_4 صورة النقطة M_2 بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

c) علم النقط : $A, M_1, M_2; M_3, M_4$ في نفس المعلم.

d) أحسب العدد : $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$

e) ليكن I منتصف القطعة $[M_3M_4]$ و M_5 نظيرة النقطة M_1 بالنسبة للنقطة I .بين أن النقط M_1 ، M_3 ، M_5 و M_4 تشكل مربع.

التمرين الثالث : (4 نقط)

نعتبر الأعداد الطبيعية N حيث : $(I):\ \begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17]\end{cases}$

1) تحقق أن العدد 239 حل للجملة : (I) .

2) ليكن N عددا نسبيا حل للجملة : (I) ، أثبت أن $N=1+17x=5+13y$ حيث y,x عددان طبيعيان يحققان المعادلة : $17x-13y=4$.

3) استنتج وجود عددا نسبيا k حيث : $N=18+221k$.

4) أثبت أن $N\equiv 18[221]$ إذا و فقط إذا كان : $N\equiv 5[13]$ و $N\equiv 1[17]$.

5) هل يوجد عدد طبيعي α حيث $10^{\alpha}\equiv 1[17]$ ؟ هل يوجد عدد طبيعي β حيث $10^{\beta}\equiv 18[221]$ ؟

التمرين الرابع : (4 نقط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم الأطوال AB و AC .

2) عين قيمة مقربة للزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ثم استنتج ان النقط C,B,A تعرف مستوي.

3) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي : $2x-y+2z+2=0$.

4) ليكن المستويين (P_1) و (P_2) ذات المعادلتين : $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$ عل الترتيب بين أن المستويين (P_1) و (P_2) يتقطعان وفق المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي هو :

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \quad / \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$$

5) أدرس تقاطع المستقيم (D) و المستوي (ABC)

6) لتكن (S) كرة مركزها $\Omega(1;-3;1)$ و نصف قطرها $r=3$.
أدرس تقاطع (S) مع كل من المستقيم (D) و المستوي (ABC). ماذا تستنتج ؟

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية ركايزي محمد . حجوط

المستوى : السنة الثالثة رياضيات — المدة : 4 ساعات و 30 د

بكالوريا تجريبي في الرياضيات

﴿ دورة ماي 2015 ﴾

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (7 نقط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$

1) احسب $g'(x)$ ، أدرس إشارتها ثم استنتج تغيرات الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.
2) أحسب $g(0)$. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا آخر α حيث $-0.72 \prec \alpha \prec -0.71$.
3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

الجزء الثاني:

لتكن الدالة f المعرفة على : $]-1,0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

و (C_f) منحنها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و الوحدة $2cm$.

1) أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف.
2) أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج إشارتها مستعينا بنتائج السؤال 3 من الجزء الأول.
3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. استنتج قيمة تقريبية لـ $f(\alpha)$ بأخذ $\alpha=-0.715$.
4) شكل جدول تغيرات الدالة f .
5) أنشئ المنحنى (C_f) .

الجزء الثالث:

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما، نضع : $I(a)=\displaystyle\int_1^a f(x)dx$

1) أعط تفسيرا هندسيا للعدد $I(a)$ ، حسب قيم العدد a .
2) بملاحظة أنه من اجل كل عدد x من $]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ ، أحسب $I(a)$ باستعمال التكامل بالتجزئة.
3) أحسب نهايتي $I(a)$ لما $a \to 0$ و لما $a \to +\infty$.

التمرين الثاني : (4 نقط)

1) نعتبر ثلاث أعداد نسبية c,b,a . باستعمال مبرهنة بيزو، أثبت صحة نظرية غوص .
2) ليكن العددين الطبيعيين p و q الأوليان فيما بينهما.

بين أنه إذا كان $a\equiv 0[p]$ و $a\equiv 0[q]$ فإن $a\equiv 0[pq]$

3) ليكن العدد النسبي n الذي يحقق الجملة : $(S):\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$

a) تحقق من وجود ثنائية نسبية (u,v) حيث : $17u+5v=1$.

b) نضع $n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v$ ، أثبت أن العدد n_0 حل للجملة (S).

c) ليكن n عدد نسبي يحقق الجملة (S) . أثبت أن $n - n_0 \equiv 0[85]$

d) استنتج أن العدد النسبي n يحقق الجملة (S) إذا و فقط إذا كان $n = 43 + 85k$ مع $k \in Z$.

4) لدى زينب بين 300 و 400 قريصة. إذا وزعتهم على مجموعات ذات 17 قريصة بقي لها 9 قريصات . و إذا جمعتهم في مجموعات ذات 5 قريصات بقي لها 3. كم عدد قريصات زينب ؟

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لأسئلة الآتية مستقلة . أجب بصحيح أو خطأ عن كل سؤال مع تبرير الإجابة.

1) المستقيم $(\Delta):\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2t \quad /t \in R \\ z = -1+3t \end{cases}$ موازي للمستوي $(P): x+2y+z-3=0$.

2) المستويات: $(P): x-2y+3z=3$ و $(P'): 2x+3y-2z=6$ و $(P''): 4x-y+4z=12$ ليس لهم نقطة مشتركة.

3) المستقيمين $(D):\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \quad /t \in R \\ z = -3+2t \end{cases}$ و $(D'):\begin{cases} x = 7+2t' \\ y = 2+2t' / t' \in R \\ z = -6-t' \end{cases}$ متقاطعان.

4) نعتبر النقط $A(-1;0;2)$ ، $B(1;4;0)$ و $C(3;-4;-2)$. معادلة المستوي (ABC) هي : $x+z=1$

التمرين الرابع : (5 نقط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $2cm$) ، نعتبر النقط M,B,A ذات اللواحق : $Z_M;4i;4$ على الترتيب.

1) ليكن العدد الحقيقي θ من المجال $[0,2\pi]$ و العدد الحقيقي الموجب تماما r.

نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $re^{i\theta}$ و النقطة F بحيث يكون المثلث OEF قائم في O و متساوي الساقين . ماهي لاحقة النقطة F ؟

2) أنشئ الشكل في حالة : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ و $r=3$. (يتمم الرسم تدريجيا)

3) لتكن النقط S,R,Q,P منتصفات القطع التالية : $[AB]$، $[BE]$، $[EF]$، $[FA]$ على الترتيب.

a) أثبت أن الرباعي $PQRS$ متوازي الأضلاع.

b) نضع $Z = \frac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$ ، عين طويلة و عمدة للعدد المركب Z . استنتج أن الرباعي $PQRS$ مربع.

4) - أحسب بدلالة r و θ لاحقتي النقطتين P و Q على الترتيب.

- أحسب بدلالة r و θ مساحة المربع $PQRS$

- r عدد ثابت ، من أجل أي قيم للعدد θ تكون للمساحة قيمة قصوى؟ ماهي عندئذ لاحقة النقطة E ؟