

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

الشعبة: 3 رياضي

المدة: 4 سا

التمرين الأول: (4 نقط)

I] أذكر صحة أم خطأ العبارات التالية مع التعليل:

1 ✓ لتكن f دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(1+x)$.

العبارة 1 " الدالة f موجبة على $[0; +\infty[$ "

2 نعتبر المتتالية (u_n) معرفة على \mathbb{N} حيث كل حدودها تختلف عن -3.

نعرف (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{2}{3+u_n}$.

✓ العبارة 2 " إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن (v_n) متتالية متقاربة "

3 ليكن $z = -\tan \frac{3\pi}{10} \left(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)$

العبارة 3 " عمدة العدد المركب بترديد 2π هو $\frac{13\pi}{10}$ " X

II] أسئلة مستقلة عن بعضها البعض:

1 ✓ جد كل الأعداد الطبيعية a و b حيث $a+b=1170$ و $\text{PGCD}(a,b)=65$.

2 ✓ أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{2n} - 1$ يقبل القسمة على 4.

✓ ب- إستنتج باقي القسمة الإقليدية لـ $3^{40} + 5$ على 4.

3 ✗ عين x و y و z من \mathbb{N} بحيث: $\overline{xyz} = \overline{zyx}^{11}$.

التمرين الثاني: (6 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر في \mathbb{C} ، مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة: $(E_\theta): z^2 + 4z \cos \theta + 4 = 0$ ، حيث $\theta \in]0; \pi[$.

1 ✓ بدون حل المعادلة (E_θ) ، أثبت أنه إذا كان α حل للمعادلة (E_θ) فإن $\bar{\alpha}$ هو كذلك حلا لها.

2 نضع: $z_1 = -2 \cos \theta + 2i \sin \theta$ و $z_2 = -2 \cos \theta - 2i \sin \theta$.

✓ أ- تحقق أن z_1 و z_2 هما حلّي المعادلة (E_θ) .

✓ ب- أكتب z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

ب- أستنتج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلث قائم في O حيث M_1 و M_2 نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب z_1 و z_2 .

ث- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z = 2e^{i\theta} + 3$.

ي مايلي نعتبر: $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ و النقط C, B, A لواحقتها على الترتيب z_1 و z_2 و 2.

(3) أ- تحقق أن: $\frac{z_2 - 2}{z_1 - 2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و إستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC .

(4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = iz + 3$.

أ- عين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة.

ب- عين (Γ') صورة الدائرة (Γ_1) ؛ تحقق أن (Γ) جزء من (Γ') .

(5) ليكن S_2 تحويل نقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = az + b$ مع

a و b مركبان و $a \neq 0$.

أ- عين العددين a و b حتى يكون التحويل المركب $S_1 \circ S_2$ تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و مركزه

Ω ذات اللاحقة $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$. إستنتج طبيعة التحويل S_2 و عناصره المميزة.

التمرين الثالث: (5 نقط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ليكن: $(P_m): (2-m)x + 3my - (m+1)z - 3 = 0$

حيث m عدد حقيقي.

(1) أثبت أنه، من أجل كل m عدد حقيقي، (P_m) هو مستوي.

(2) عين المستوي (P_m) الذي يوازي المستقيم: $(D): x - 2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$.

(3) ليكن $A(1;0;1)$ و الشعاعين $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$. هل يوجد مستوي (P_m) يوازي المستوي

$P(A, \vec{u}, \vec{v})$ ، حيث $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ هو مستوي يشمل النقطة A و موجه بالشعاعين \vec{u} و \vec{v} .

(4) برهن أن كل المستويات (P_m) تحتوي على مستقيم ثابت (Δ) يطلب تحديده.

(5) من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، نعتبر المستقيم (Δ_λ) المعرف بـ: $\alpha \in \mathbb{R}$ ؛ $\begin{cases} x = 2 + \lambda\alpha \\ y = (1 - \lambda)\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$. برهن أنه يوجد مستوي

(Q) مستقل عن λ يحتوي كل المستقيمت (Δ_λ) .

(6) عين معادلة ديكراتية للمستوي (P_λ) الذي يحوي المستقيم (Δ_λ) و يوازي المستقيم: $(D_1) \begin{cases} x = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$.

التمرين الرابع: (5 نقط)

تكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ و (C_r) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

الجزء الأول:

1/ أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

✓ بب عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_r) عند النقطة التي فاصلتها 1

✓ (2) برهن أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0,5; 0,7[$.

✓ (3) أثبت المنحنى (C_r) و المماس (T).

الجزء الثاني :

نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

(1) نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة على \mathbb{N}^* بـ : $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ،

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(2n) \leq S_n$$

(2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

(3) إستنتج المساواة : $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

(4) مستعملا الأسئلة السابقة ، عين النهاية لـ : $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ لما n يؤول إلى $+\infty$.