امتحان تجريبي في الرياضيات　　　شعبة الرياضيات وتقني رياضي　　　الأستاذ ساعد

المدة : 4 ساعات ونصف　　　　　　　　　　　　التاريخ : 6 ماي 2016

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أن N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أن : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq-2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أن : $IM' \times AM = \sqrt{2}$ وان $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ج) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(-x+1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) أرسم (Δ) و (C_g).

6) استنتج اشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x+1}$ ثم أحسب :

$\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$.

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

سلطان

سلطان

سلطان

سلطان

سلطان

سلطان

سلطان

الموضوع الثاني

سلطان

التمرين الأول (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta\in[0;\pi]$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$ ، $z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)$ و $z_2=\sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1,z_0 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$.

ب) عيِن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا.

3) نفرض $r=1$ و $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها : z_1,z_0 و z_2 على الترتيب.

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيِن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ،

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$$

التمرين الثاني :(04 نقاط)

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):5x-6y=3$

1. أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

2. a و b عددان طبيعيان حيث :

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

التمرين الثالث (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط

$A\left(3;-2;2\right)$, $B\left(6;1;5\right)$ و $C\left(6;-2;-1\right)$ و المستوي $\left(P\right): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم.

2) برهن أن المستوي $\left(P\right)$ عمودي على المستقيم $\left(AB\right)$ ويمر من النقطة A.

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P'\right)$ المستوي العمودي على $\left(AC\right)$ و المار من النقطة A.

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ مستقيم تقاطع كلا من المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.

5) أ) نعتبر النقطة $D\left(0;4;-1\right)$. بين أن المستقيم $\left(AD\right)$ عمودي على المستوي $\left(ABC\right)$.

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي $\left(BDC\right)$

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :

$$f\left(x\right)=x-\left(x^2+1\right)e^{-x+1}$$

نسمي $\left(C_f\right)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'\left(x\right)=1+\left(x-1\right)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$.

3- بيَن أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيِن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x) = x + m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$.

1- أ) بيِن أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـcm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = 1$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا

تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : رياضيات
الموضوع الاول

التمرين الاول (04 نقاط)

لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$

1) تبيان أنّ N يحقق : $309a+15c=226b$

- لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي

$N=626a+125b+30c$

- ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$

أي $N=577b+8a$

- إذن : $626a+125b+30c=577b+8a$

اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$............ $\boxed{01}$

2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b:

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$

لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .... $\boxed{0.25}$

3) نفرض $b=3$.

أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$

- لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$
- ولدينا : $309a-618=60-15c$

ومنه $309(a-2)=60-15c$............ $\boxed{0.75}$

ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$:

- لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$

$5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص .

- **استنتاج قيمة a :**

بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k\,(k\in\mathbb{N})$

ولدينا : $a<5$ أي أنّ : $a=2$......... $\boxed{0.75}$

- **استنتاج قيمة العدد c:**

لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$.......... $\boxed{0.75}$

ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10:

$N=577(3)+8(2)=1747$............ $\boxed{0.5}$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$

1- أ) التحقق من أنّ : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ أي

$z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$ 0.25

ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:

- لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$
- ولدينا : $\frac{|i|\times|z+1-i|}{|z+2|}=\left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|=|z'|$ أي $OM'=\frac{BM}{AM}=1$

إذن $OM'=1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$ 0.5

ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :

- z' تخيلي صرف معناه $Arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$

- ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i)+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

معناه : $\frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$

أي $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=k\pi$

- المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B.

$(E)=(AB)-\{A,B\}$ 0.5

2- أ) التحقق من أنَ : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$

لدينا : $\frac{1-i}{z+2}=\frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=\frac{iz+i+1}{z+2}-i=z'-i$ أي $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ 0.25

ب) استنتاج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$:

- لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $|z'-i|=\left|\frac{1-i}{z+2}\right|$ أي $|z'-i|=\frac{|1-i|}{|z+2|}$

وبالتالي : $IM'=\frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$ 0.25

- **استنتاج أنَ : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$**

لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i)=Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$

أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

اي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ .... $\boxed{0.5}$

ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :

- لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$
- ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$

أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ .... $\boxed{0.5}$

-3 لدينا : $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ):

لدينا : $AE=|z_E-z_A|=\left|-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

ومنه $E\in(\Gamma)$ .... $\boxed{0.25}$

- **تبيان أن :** $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ **:**

لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)=arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right)=Arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ .... $\boxed{0.5}$

أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E:

لدينا : $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

ومنه $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$

أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E:

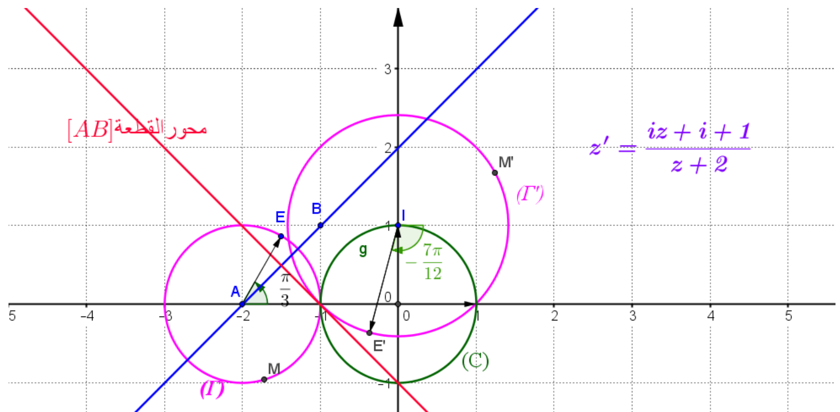
لدينا : $IE'=\sqrt{2}$ ومنه E' تنتمي إلى الدائرة (Γ') ذات المركز $I(i)$ ونصف القطر $\sqrt{2}$

حيث : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه

$\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$

الرسم :

$\boxed{0.5}$ ....



التمرين الثالث : (05 نقاط)

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ .... $\boxed{0.25}$

2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>0$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ :

$0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. .... $\boxed{0.75}$

ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : $\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=u_{n+1}-u_n$ .... $\boxed{0.25}$

- **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\dfrac{1}{2}$

- ولدينا : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.................. $\boxed{0.5}$

ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\dfrac{1}{2}$................. $\boxed{0.25}$

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{2}$................ $\boxed{0.25}$

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\dfrac{3\times 3^n\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\dfrac{\dfrac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\dfrac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

$v_{n+1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\dfrac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$................... $\boxed{0.5}$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية

أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{1\times\dfrac{1}{5}}{2\times\dfrac{1}{5}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{-\dfrac{3}{5}}=-\dfrac{1}{3}$...... $\boxed{0.25}$

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\times 6^n$................. $\boxed{0.5}$

- **استنتاج أنّ :** $u_n = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \dfrac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $\left(2v_n - 3^n\right)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \dfrac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن : $u_n = \dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right) - 3^n} = -\dfrac{6^n}{-2\times 6^n - 3\times 3^n}$ ومنه

$u_n = -\dfrac{6^n}{-2\times 6^n - 3\times 3^n} = \dfrac{2^n \times 3^n}{2\times 3^n \times 2^n + 3\times 3^n}$ أي $u_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}+3} = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$ 0.75

- **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$** :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$ 0.5

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لدينا : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- **حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(e^x+1\right)\right) = 0$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right) = 0 \end{cases}$ 0.25

التفسير الهندسي : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$ 0.25

- **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(e^x+1\right)\right) = -\infty$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+1\right) = +\infty \end{cases}$ 0.25

2) تبيان أنّ $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$:

- لدينا : $g'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

أي $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة g:**

x	$-\infty$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

إذن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة g :** 0.5

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$

أي $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$ 0.5

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$:

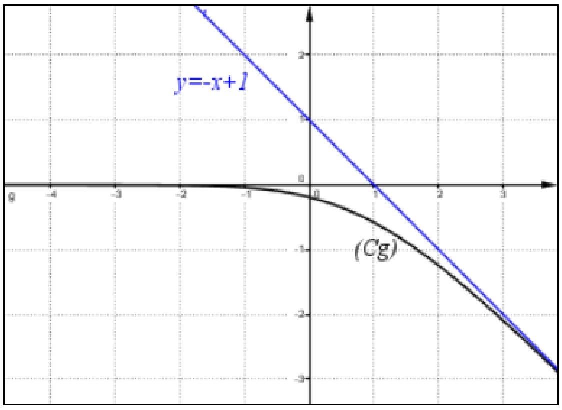
- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$ 0.5

تفسير النتيجة بيانيا :

المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$ 0.25

5) الرسم :



0.75 ....

6) استنتاج اشارة $g(x)$:............. 0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

.II لدينا : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ 0.25

- **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=0$ 0.25

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$:

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln(e^{x}+1)+e^{-x}\times\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln(e^{x}+1)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ 0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

.... 0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

• جدول تغيرات الدالة f :

0.5 ....

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{e^x+1}$ 0.25

• حساب $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

إذن $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=ln2$ 0.5

4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

أي $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$$

إذن $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$ 0.5

تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 — الشعبة رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$

حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0;\pi]$

1) كتابة الأعداد z_0, z_1 و z_2 على الشكل المثلثي :

- لدينا : $z_0 = r(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta))$

$$z_1 = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$ .... $\boxed{3\times 0.5}$

$$z_2 = \sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$

- لدينا : $\overline{z_0} = r(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta))$

- $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = r(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta))$

ومنه : $\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ أي $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi \ (k\in\{0;1\}) \end{cases}$

من أجل $k=0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنّ $\theta\in[0;\pi]$)

من أجل $k=1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض)

$z_1 = \overline{z_0}$ معناه $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ .... $\boxed{0.75}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :

- لدينا : $\dfrac{z_0}{z_1}=\dfrac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$

0.25 .... $\dfrac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

اي $\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2}$

- إذن $\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$ أي $\dfrac{n\pi}{2}=k\pi$

وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$ 0.25

3) لدينا : $r=1$ و $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

- إذن : $z_0=-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$

لدينا : $z_G=\dfrac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\dfrac{-1+\cancel{i\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}+i-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{i\sqrt{3}}}{3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$

$z_G=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$ 0.5

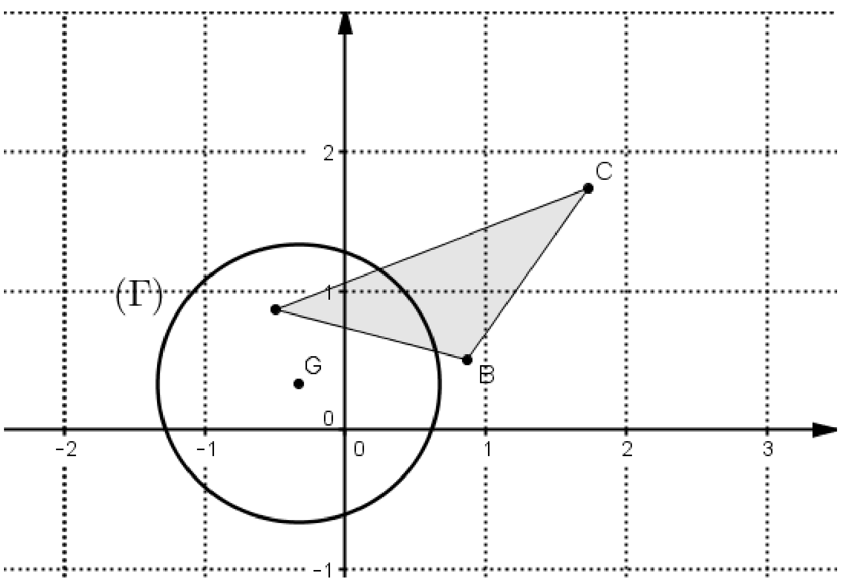
ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):

- لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$

ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$

0.75 ....



التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا : $(E): 5x-6y=3$

1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:

- لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$

أي $5x=3(1+2y)$

لدينا : $3/5x$ و $3\wedge 5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص

أي أنّ x مضاعف للعدد 3 .... 0.25

ب) تعيين حل خاص حل للمعادلة (E) :

نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times 3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$

إذن الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E) 0.5

- **حل المعادلة (E):**

- لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$

أي $(*) : 5(x-3)=6(y-2)$

- لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge 5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .

أي $x-3=6k\,(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\mathbb{Z})$

- من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$

ومنه $y-2=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2\,(k\in\mathbb{Z})$

مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$ 0.5

ج) استنتاج حلول الجملة : $(S): \begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

- $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=6m-1 \\ x=5n-4 \end{cases}$

أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$

ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$

$x=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$ 0.75

2) - لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$

- **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E):**

- لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$

ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$

مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ 0.75

- **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$**

ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد :

$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي الثنائية $(\alpha;\beta)=(2;4)$ 0.75

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا : $A(3;-2;2)$,$B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) البرهان على أنّ المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$
- ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

- إذن لدينا : $BC^2=45$ و $AB^2+AC^2=27+18=45$

ومنه $BC^2=AB^2+AC^2$ أي المثلث ABC قائم في النقطة A 0.5

2) البرهان على أنّ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A** 0.5

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل :

$3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$ 0.5

4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

- لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

نضع : $z=t$

وبالتالي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $(\Delta):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases} \quad ;(t\in\mathbb{R})$ 0.5

5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

- **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) 0.5

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$

و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$ $\quad v_{ABCD}=27uv$ 0.5

ج) تبيان أنَ قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$:

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times6-3(-6)+6\times0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\|\overrightarrow{DB}\|\times\|\overrightarrow{DC}\|\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ أي $cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=\frac{54}{9\times6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^{\circ}$ 0.5

د) حساب مساحة المثلث BDC :

- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times \sin BDC=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times \frac{\sqrt{2}}{2}=27us$

- **استنتاج المسافة بين النقطة** A والمستوي (BDC):

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}\times 27\times d(A,(BCD))=27$

ومنه $d(A,(BDC))=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\qquad$ $d(A,(BDC))=3$ 0.5

التمرين الرابع : (08) نقاط)

I. **لدينا :** $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

(1 **أ) حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$: لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.25

- **تبيان أنّ :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.25

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

- لدينا : $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

$f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$ 0.5

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ 0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

.... 0.5

2) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ 0.25

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x 0.5

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$

وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1.8<\alpha<1.9$ 0.5

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1\times(x-1)-1=x-2$ أي $(T):y=x-2$ 0.5

5) تبيان أنّ $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times\left(-e^{-x+1}\right)=(x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ 0.25

- **استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

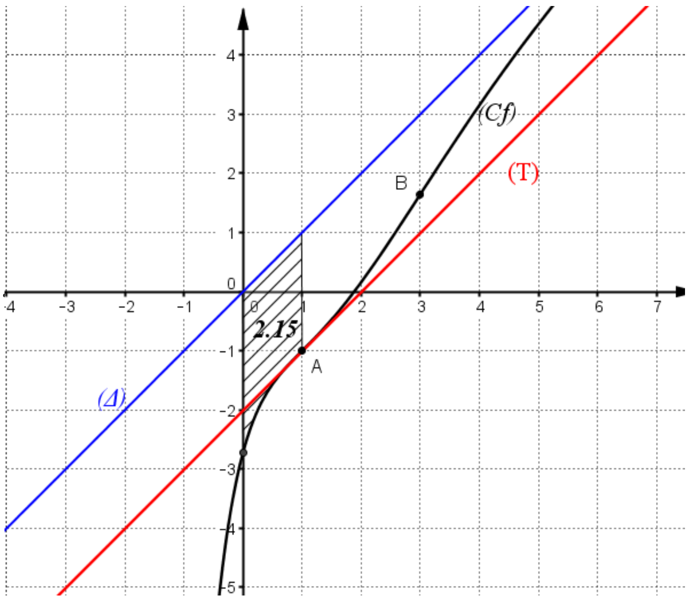
- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $B(3;f(3)),A(1;f(1))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f) 0.75

6) حساب $f(3),f(0)$: $f(3)=3-9e^{-2}=1.65, f(0)=-e=-2.71$

الرسم :



.... 01

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$

- هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا 0.5

.II من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:

- لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.5

ب) **حساب I_1 :**

لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$ 0.25

-2 أ) تبيان أنّ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

- لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$

نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$

ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$

وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$

ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$ .... $\boxed{0.5}$

ب) حساب I_2 :

$I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$ .... $\boxed{0.25}$

-3 حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=1, x=0$

$$S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$$

أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2$

$S=2.15cm^2$ .... $\boxed{0.5}$