

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

(دورة ماي 2016)

المدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة (E) ذات المجهول (x ; y) التالية : $414x - 1170y = 72$
أ- عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 414 ، 1170 و 72 .
ب- بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x ; y) من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 1[23]$.
ج- استنتج حلول المعادلة (E) .

(2) λ عدد طبيعي يكتب $\alpha\beta 0\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ، ويكتب $\beta\alpha 200$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 . عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

(3) أ- حل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2016 .
ب- نضع : $m = PPCM(a ; b)$ و $d = PGCD(a ; b)$.
عيّن الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^2 - 2d^2 = 2016$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب :
 $z_A = 5 - 4i$ ، $z_B = -1 - 4i$ و $z_C = -4 - i$.

(1) ليكن S التشابه المباشر المعرف كما يلي : $S(A) = B$ و $S(B) = C$.
أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه S .

ب- عيّن النسبة ، الزاوية والمركز Ω للتشابه S .

(2) التشابه المباشر S يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z حيث $z \neq 0$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z' .
أ- تحقق أن : $z_\Omega - z' = i(z - z')$.

ب- استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

(3) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$.
نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = A_0 A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = A_n A_{n+1}$.

أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة u_n بدلالة n .

ج- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

د- احسب بدلالة n نصف القطر r_n للدائرة المحيطة بالمثلث $\Omega A_n A_{n+1}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(4; 2; 2)$ ،

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

(P) المستوي الذي يمرّ بالنقطة A وعمودي على المستقيم (Δ) .

1 أ- اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) .

ب- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) وأن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) .

ج- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

2 أ- عيّن إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

ب- بيّن أن النقط A ، B ، C و D ليست من نفس المستوي .

ج- عيّن طبيعة المثلث ABD ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه ABCD .

3 عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D ونصف قطر كل منهما 3 .

4 m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة : $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$.

أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيماً ثابتاً (يطلب تعيين تمثيل وسيطي له) وذلك مهما يكن الوسيط الحقيقي m .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (ax^3 + bx) e^{-x^2+1}$

حيث : a و b عدنان حقيقيان . (C_g) المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 1cm) .

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة A (1 ; 2) تنتمي إلى المنحني (C_g) و (C_g) يقبل في النقطة A مماساً يوازي حامل محور الفواصل .

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (x^3 + x) e^{-x^2+1}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في نفس المعلم السابق .

1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 أ- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (-2x^4 + x^2 + 1) e^{-x^2+1}$ ،

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها .

- (3) أ- احسب $f(-x) + f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم فسّر النتيجة ببيانها .
 ب- اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة O .
 (4) أ- ارسم (T) و (C_f) .
 ب- ناقش بيانها ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$.
 (III) (1) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .
 (2) استنتج ، بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1$ و $x = -1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4$.
 (1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟ (برّر إجابتك) .
 (2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بـ : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$.
 أ- عيّن العددين الحقيقيين α و β لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
 ب- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 (3) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 .
 ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2016} على 13 .
 ج- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2017^{1438}$ على 13 .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
 (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = z_B$ ولتكن (Γ) الدائرة التي مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 .
 أ- اكتب كلا من z_C و z_B على الشكل الآسي .
 ب- تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2016}$ حقيقي .
 ج- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .
 (3) ليكن θ عددا حقيقيا ينتمي إلى المجال $]-\pi; \pi]$ ، M نقطة من الدائرة (Γ) لاحقها $2e^{i\theta}$.
 نسمي N النقطة من (Γ) حيث : $(\vec{OM}; \vec{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
 - اكتب لاحق النقطة N على الشكل الآسي .
 (4) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- تحقق أن العبارة المركبة للدوران r هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
 ب- نعتبر النقطتين F و K حيث : F منتصف القطعة $[BM]$ و K منتصف القطعة $[CN]$.

- بيّن أن : $r(F) = K$

ج- استنتج طبيعة المثلث AFK .

(5) أ- بيّن أن : $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

ب- استنتج z_M لاحقة النقطة M بحيث تكون المسافة AF أكبر ما يمكن .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل .

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$.

المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ يساوي :

(أ) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ (ب) $e - \left(\frac{1}{e}\right)^n$ (ج) $(e-1)\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left| (1+i)\bar{z} - 2 \right| = 3\sqrt{2}$ هي :

(أ) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1+i$.

(ب) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

(ج) دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $-1-i$.

(3) يعرف الجدول المقابل قانون احتمال لمتغير عشوائي X لتجربة عشوائية :

x_i	1	2	3	4
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X يساوي :

(أ) 1.25 (ب) 2.5 (ج) 1.12

(4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x; y; z)$ حيث

$$\text{هي : } \begin{cases} x = -1 - \frac{3}{2}t + t' \\ y = 1 - t + \frac{2}{3}t' \\ z = 2 - 6t + 4t' \end{cases} (t; t') \in \mathbb{R}^2$$

(أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(-1; 1; 2)$.

(ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(-1; 1; 2)$ و $\vec{u}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 2\right)$ شعاع توجيه له .

(ج) المستوي الذي يشمل النقطة $A(-1; 1; 2)$ و $\vec{n}(2; 3; -1)$ شعاع ناظمي له .

التمرين الرابع : (07 نقطة)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2\ln x$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث : $0.75 < \alpha < 0.76$.
- (2) استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$.

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ،

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

ب- ارسم المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

(4) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\frac{2}{x}(1 + \ln x) = m$.

(5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أ- احسب ، بوحدة المساحة ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها :

$$x = 1 \text{ و } x = \lambda \text{ و } y = -x + 1$$

ب- عيّن قيمة λ بحيث يكون $A(\lambda) = \ln \lambda$.

(III) a عدد حقيقي موجب تماما .

نعتبر الدالة f_a المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f_a(x) = 1 - x + \frac{a}{x}(1 + \ln x)$.

نسمي (C_a) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أثبت أن جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثيها .

(2) نعتبر النقط : $A\left(-2; \frac{4}{a}\right)$ ، $B\left(1; \frac{2\ln a}{a}\right)$ ، $C(-2a; 2a - 2)$ ، ولتكن G_a مرجح الجملة المثقلة :

$$\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$$

أ- عيّن بدلالة a إحداثيي النقطة G_a .

ب- استنتج مجموعة النقط G_a عندما يسمح العدد a المجموعة \mathbb{R}_+^* .