

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

1. تحقق أن $5^6 \equiv 1[7]$ و إستنتج أن $5^{2016} \equiv 1[7]$
2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$
 (أ) بين أنه من أجل n من \mathbb{N} فإن $4S_n = 5^{n+1} - 1$ و إستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ,
 (ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.
 (ت) بين أن $4S_{2015} \equiv 0[7]$ و إستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7
 (ث) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n
3. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة $5^n x + S_n y = 1$ (E)
 تحقق أن $(-4, 5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و α عدد حقيقي من المجال $]0, \pi[$
- لتكن (S_α) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث : $OM^2 - 2\cos(\alpha)[\vec{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4\sin^2(\alpha) = 0$
1. أعط معادلة ديكارتية لـ (S_α)
 - (ب) بين أن (S_α) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_α و نصف قطرها R_α .
 (ت) إستنتج مجموعة النقط I_α عندما يمسح α المجال $]0, \pi[$.
 2. (أ) عين سطوح الكرات (S_α) التي تمر بالمبدأ O .
 (ب) بين أن O منتصف القطعة $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$.
 (ت) إستنتج أن (S_α) و $(S_{\pi-\alpha})$ متناظران بالنسبة إلى O .
 3. ليكن المستوي (P) ذو المعادلة : $x + y + z = 0$
 (أ) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة I_α على (P) .
 (ب) أدرس تقاطع (P) و (S_α) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
نعتبر النقطة A ذات اللاحقة 2 و (C) الدائرة ذات المركز O وتشمل A .

1. نضع $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

(أ) بين أن $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$

(ب) بين أن النقطتين B و C لاحقتاهما على الترتيب α و $\bar{\alpha}$ تنتميان إلى الدائرة (C) .

(ت) أنشئ (C) و النقط A, B و C .

2. لتكن D نقطة من الدائرة (C) لاحقتها $2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi, \pi]$ و E صورة

D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- برر أن لاحقة النقطة E هي $z_E = \alpha e^{i\theta}$ و علم في نفس الشكل النقطتين D و E .

3. لتكن النقطتان F و G منتصفا القطعتين $[BD]$ و $[CE]$ على الترتيب.

(أ) برر أن لاحقة F و G هما $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ و $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$ على الترتيب.

(ب) بين أن $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ (يمكن إستعمال السؤال 1) (أ) و إستنتج طبيعة المثلث AFG .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ كالتالي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. (أ) أحسب النهايات عند حدود مجالات التعريف.

(ت) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

(ث) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. اثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلته $y = -\frac{1}{2}x$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f) .

3. أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

4. أثبت أن النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

5. أثبت أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$

6. أرسم (C_f) .

7. لنعتبر الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + \ln\left|\frac{|x|-1}{|x|}\right|$

(أ) عين مجموعة تعريف الدالة g .

(ب) ادرس شفعية الدالة g .

(ت) بين كيف يمكن رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) . (رسم (C_g) غير مطلوب).

8. (أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كلا من $\int_2^3 \ln(x) dx$ و $\int_2^3 \ln(x-1) dx$.

(ت) إستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمت التي معادلاتها $x = 2$ و $x = 3$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة : $21x - 17y = 8$(*) حيث x و y عددين طبيعيين .
- أ- عين الثنائية (x_0, y_0) حل للمعادلة (*).
 - ب - حل في \mathbb{N}^2 للمعادلة (*).
 - أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13 ،
ب - بين أنه إذا كان (α, β) حل للمعادلة (*) فان : $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0 [13]$.
 - أ- بين أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (*) و x مضاعف لـ 4 فان $y \equiv 0 [4]$.
 - ب - عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (*) التي يكون من أجلها : $PGCD(x, y) = 4$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية إختار الإقتراح الصحيح مع التعليل

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتان A و B لاحتماهما على الترتيب 1 و i . مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-i}{z-1}$

حقيقي هي : أ . المستقيم (AB) بإستثناء A ، ب . القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء A

ج . الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء A .

- إذا كانت طويلة عدد مركب z هي 3 فإن مرافق z هو :

أ . $\frac{3}{z}$ ، ب . $\frac{\sqrt{3}}{z}$ ، ج . $\frac{9}{z}$

- ليكن z عدد مركب $|z+i|$ هي :

أ . $|z|+1$ ، ب . $\sqrt{z^2+1}$ ، ج . $|iz-1|$

- ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث θ عمدة له . عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ هي :

أ . $-\frac{\pi}{3} + \theta$ ، ب . $\frac{2\pi}{3} + \theta$ ، ج . $\frac{2\pi}{3} - \theta$

- لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $1-i$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ و تحقق $|z-1+i| = |3-4i|$ لها معادلة من الشكل :

أ . $y = -x + 1$ ، ب . $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ ، ج . $z = 1-i + 5e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $U_0 = \frac{3}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+3}$.

أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n > 1$.

ب- ادرس رتبة المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

2. لتكن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $V_n = \frac{U_n}{U_n - 1}$

(أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

(ب) عبر عن V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n = \frac{3}{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ و أحسب نهاية (U_n) .

3. لتكن المتتالية $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حيث : $W_n = \frac{V_n}{n^2}$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $W_n = 3e^{n \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 2 \ln(n)}$

(ب) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I . نعتبر الدالة f_k المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ : $f_k(x) = \frac{k}{e^{kx} + 1}$ (k عدد حقيقي غير معدوم)

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة f_k في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $\|\vec{i}\| = 4cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. احسب نهايات الدالة f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$ حسب قيم k ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. ليكن (D_k) المستقيم المقارب للمنحنى (C_k) و الذي معادلته $y = k$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x) = k - \frac{k e^{kx}}{e^{kx} + 1}$ ،

(ب) أدرس حسب قيم k الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و (D_k)

3. أدرس حسب قيم k اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أكتب معادلة لمماس (Δ_k) للمنحنى (C_k) في النقطة ذات الفاصلة O .

II

1. أثبت أن : $f_3(x) - f_{-3}(x) = 3$ مستنتجا طبيعة التحويل الذي يحول المنحنى (C_3) إلى المنحنى (C_{-3})

2. أنشئ (Δ_3) و (C_3) ثم استنتج إنشاء (Δ_{-3}) و (C_{-3})

3. α عدد حقيقي موجب تماما .

$A(\alpha)$ هي المساحة بالسنتيمتر مربع للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_3) و المستقيمت التي معادلاتها

$$y = 0 \quad , \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = \alpha$$

(أ) أثبت أن : $A(\alpha) = 3\alpha - \ln(e^{3\alpha} + 1) + \ln(2)$

(ب) أحسب نهاية $A(\alpha)$ لما α يؤول إلى $+\infty$