ثانوية دراح بيطاط — 3 ر.

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

السنة الدراسية 2015 – 2016 — المدة: ساعتان

التمرين الأول: (4,5)

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

1) $\ln e\sqrt{e} + \ln e^{\ln e\sqrt{e}} = \frac{3}{2}$ ، حيث e يرمز لأساس اللوغاريتم النيبري.

2) المعادلة: $e^{3x+1}-2\sqrt{e^{4x+2}}+e^{x+1}=0$ تكافئ المعادلة $(e^{x}-1)^2=0$

3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x)=-x+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & ; x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{1+\ln^2 x} & ; x>0 \end{cases}$ و (Γ) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ- f مستمرة عند 0

ب- f غير قابلة للاشتقاق عند 0 ، هندسيا المنحنى (Γ) يقبل مماسا عند 0 يوازي محور التراتيب.

جـ- المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $-\infty$ معادلته $y=-x-1$.

التمرين الثاني: (6,5)

I) g دالة عددية معرفة على $D=]1,+\infty[$ بالشكل: $g(x)=2\ln x-\frac{1}{2}\ln(x-1)$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أنه $\forall x\in D: g'(x)=\dfrac{3x-4}{2x(x-1)}$. استنتج اتجاه تغير g ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن (C_g) يقبل مماسا ميله $\frac{1}{2}$ عند نقطة A عينها.

II) f دالة معرفة على D بالشكل: $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

(Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

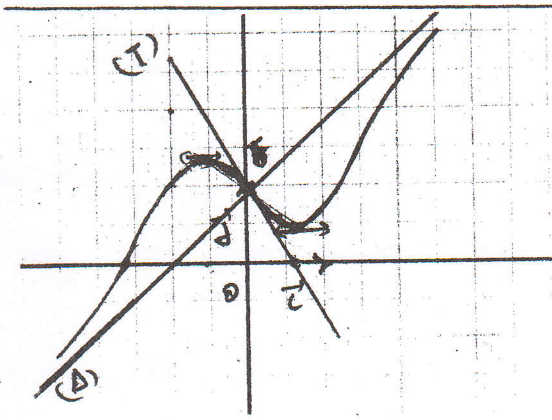
1- بين أنه $\forall x\in D \quad \ln(f(x))=g(x)$ حيث ln هي الدالة اللوغاريتمية.

2- استنتج أنه $\forall x\in D \quad f'(x)=g'(x)f(x)$

3- شكل جدول تغيرات f.

4- أنشئ المنحنى (Γ).

التمرين الثالث: (9 نقاط)



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$. (Γ) تمثيلها البياني الموضح في الشكل المقابل.

$(T): y=(1-e)x+1$ المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة J.

النقطة $J(0,1)$ مركز تناظر لـ (Γ).

نضع: $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=mx+p+g(x)$ ؛ $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)=0$ ؛ m,p عددان حقيقيان.

I) 1. بقراءة بيانية عين:

معادلة المستقيم (Δ) المستقيم المقارب المائل لـ (Γ)

ثم استنتج m و p.

2. بين أنه $\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)+f(x)=2$. استنتج أن g فردية وأن f' المشتقة الأولى لـ f زوجية.

3- نضع $\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)=(ax+b)e^{-x^2}$ حيث a و b حقيقيتان يطلب تعيينهما باستعمال المعلومات السابقة.

II) نفرض فيما يلي أن (Γ) هو المنحنى الممثل لـ f المعرفة: $f(x)=x+1-xe^{-x^2+1}$

1- بين أنه $\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x)=2x(3-2x^2)e^{-x^2+1}$ حيث f'' الدالة المشتقة الثانية لـ f.

استنتج اتجاه تغير الدالة f' على $[0,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها على هذا المجال.

2. بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α / $0,51<\alpha<0,52$

استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^+$ ثم شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.

3- أكتب معادلة المماس (T_1) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $1/\sqrt{2}$.

4- أنشئ (T_1) ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $-x^2+1+\ln x-\ln m=0$

ثانوية رابح بيطاط — تصحيح اختبار رياضيات - تقني رياضي — الفصل I — 2016 - 2015

التمرين الأول:

1) $\ln e\sqrt{e} + \ln e^{\ln e\sqrt{e}} = 2\ln e\sqrt{e} = 2(1+\frac{1}{2}) = 3$

والجواب خطأ.

2) $e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{4x+2}} + e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x+1}(e^{2x} - 2e^{x} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x+1}(e^{x}-1)^2 = 0$

علما أن $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{x+1} \neq 0$ فإن المعادلتان متكافئتان والجواب صحيح.

3) $\begin{cases} f(x) = -x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & / x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1+\ln^2 x} & / x > 0 \end{cases}$

أ) الاستمرارية:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+\ln^2 x} = 0 \quad (\lim_{x\to 0^+} \ln^2 x = +\infty)$

ومنه f مستمرة عند 0 والجواب صحيح.

ب) الاشتقاقية:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\ln^2 x} = 0$

f قابلة للاشتقاق عنده

هندسيا: (C) يقبل مماسا عنده يوازي محور الفواصل والجواب خاطئ.

جـ) $\lim_{x\to -\infty}(f(x)+x+1) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1$

$= -1+1 = 0$

ومنه (C) يقبل م. مقارب مائل معادلته $y = -x-1$ ومنه الجواب صحيح.

التمرين الثاني:

$g(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) \qquad D =]1,5]$

$g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2(x-1)}$

$= \frac{4x-4-x}{2x(x-1)}$

$\boxed{g'(x) = \frac{3x-4}{2x(x-1)}}$

$\forall x \in D \quad 2x(x-1) > 0$

إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة $3x-4$

$1 \quad - \quad \frac{4}{3} \quad + \quad +5$

g متزايدة تماما على $[\frac{4}{3}, +5]$ ومتناقصة تماما على $]1, \frac{4}{3}]$.

x	1	$4/3$	5
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	↗

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$

$(\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty)$

2) $g'(x) = \frac{1}{2}$ يعني (g) يقبل مماسا ميله $\frac{1}{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x(x-1)} = 1$

$\Leftrightarrow 3x-4 = x^2-x$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

ومنه (C) يقبل مماسا ميله $\frac{1}{2}$ عند النقطة A

$A(2, 2\ln 2)$

II) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \quad / D =]1,5]$

الدالة f موجبة على D لأن

$\ln f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

$= \ln x^2 - \ln(\sqrt{x-1})$

$= 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1) \quad / x > 0$

$= g(x)$

ومنه $(\ln f(x))' = g'(x)$

ومنه $\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)$

ومنه $f'(x) = g'(x) f(x)$

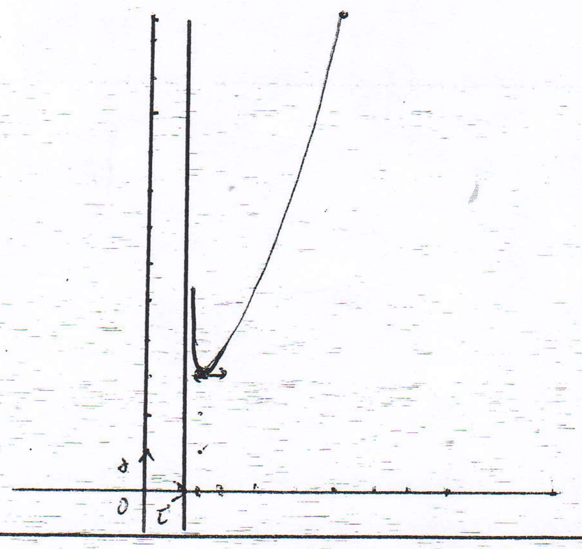
من أجل كل x من D $f(x) > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$.

ومنه f متزايدة تماما على $[\frac{4}{3}, +5]$ ومتناقصة تماما على $]1, \frac{4}{3}]$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 1$

x	1	$4/3$	$+5$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt{3}\frac{16}{9}$	↗ $\frac{25}{2}$

جـ)



التمرين الثالث :

$(T) : y = (1-e)x + 1$.

$f(x) = mx + p + g(x)$ / $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$

$I(0,1)$ مركز تناظر لـ (Γ) .

1) $(\Delta) : y = ax + b$.

حيث $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{0+1} = 1$.

$(0,1) \in (\Delta) \Leftrightarrow b = 1$.

$(\Delta) : y = x + 1$

كما أن $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$ فإن معادلة المستقيم

المقارب المائل هي $y = mx + p$

بالمطابقة نجد : $m = 1 , p = 1$

2) $I(0,1)$ مركز تناظر لـ (Γ) إذن : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(-x) + f(x) = 2$.

ومنه $f(-x) = 2 - f(x)$

$g(x) = f(x) - (x+1)$.

$g(-x) = f(-x) - (-x+1)$.

$= 2 - f(x) + x - 1$.

$= -f(x) + x + 1$.

$= -(f(x) - x - 1)$

$= -g(x)$

ومنه g فردية ،

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) + f(x) = 2 \ldots (*)$

$(*) \Leftrightarrow -f'(-x) + f'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$

ومنه f' زوجية

3) $g(x) = (ax+b)e^{-x^2}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow g(0) = f(0) - 1 = 0$.

$g(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

ميل المماس (T) = $f'(0) = 1 - e$.

$f'(x) = 1 + g'(x) \Leftrightarrow g'(0) = -e$

$g'(x) = ae^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(ax + b)$

$= e^{-x^2}(a - 2ax^2)$ ~~2bx~~)

$g'(0) = -e \Leftrightarrow a = -e$

ومنه

$g(x) = -exe^{-x^2} = -xe^{-x^2+1} = g(x)$

II

$f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$

$f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} + 2x^2e^{-x^2+1}$

$f'(x) = 1 + e^{-x^2+1}(2x^2 - 1)$

$f''(x) = -2xe^{-x^2+1}(2x^2-1) + 4x(e^{-x^2+1})$

$f''(x) = 2xe^{-x^2+1}(-2x^2+1+2)$

ومنه $f''(x) = 2x(3-2x^2)e^{-x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$ $e^{-x^2+1} > 0$ إذن إشارة $f''(x)$

هي إشارة $(3-2x^2)$ ومنه : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \text{أو } x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ مرفوض} \end{cases}$

x	0		$\sqrt{3/2}$		
		$+$		$-$	

إذن f' متزايدة تماما على $]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[$ ومتناقصة

تماما على $[0, \sqrt{\frac{3}{2}}]$.

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ $\quad (\lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0)$

x	0	α	$\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		0 $+$	
$f'(x)$	$1-e$ ↗	0	$1+2e^{-\frac{1}{2}}$ ↘	1

f' مستمرة على $[0{,}51 , 0{,}52]$ و f' تأخذ قيم متباينة على هذا المجال . وهي متزايدة تماما على هذا المجال

$f'(0{,}51) =$

$f'(0{,}52) =$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α / $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$

ومنه جدول إشارة $f'(x)$ هو :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad (\lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2+1} = 0)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3) $(T_1) : y = x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$

$y = x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e} \Rightarrow y = x + 1 - \sqrt{\frac{e}{2}}$

4) المعادلة $-x^2 + 1 + \ln x - \ln m = 0$ معرفة لأن $x > 0$ ، $m > 0$ ... (1)

$(1) \Leftrightarrow -x^2 + 1 + \ln x = \ln m$

$\Leftrightarrow e^{-x^2+1} \cdot e^{\ln x} = m$.

$\Leftrightarrow -m = -xe^{-x^2+1}$

$\Leftrightarrow x + 1 - m = f(x)$

نضع $m' = 1 - m$ حلول هذه المعادلة هي

فواصل نقاط تقاطع (Γ) مع المستقيم $(\Delta_m) : y = x + m'$ $(\Delta_m \parallel \Delta)$

على المجال $]0, +\infty[$ مع $m' = 1 - m$ ، $m > 0$

• $m' < 1 - \sqrt{\frac{e}{2}}$ أي $m > \sqrt{\frac{e}{2}}$ لا توجد حلول .

$m' = 1 - \sqrt{\frac{e}{2}}$ أي $m = \sqrt{\frac{e}{2}}$ حل مضاعف $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 - \sqrt{\frac{e}{2}} < m' < 1$ أي $0 < m < \sqrt{\frac{e}{2}}$ حلان متمايزان

$m' \geq 1$ أي $m < 0$ مستحيل .