الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية سطـــــــــــــــــيف

امتحان بكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة: مـــــــــــــــــاي 2017

الشعبة: رياضيات — ثانوية المجاهد: بن تومي موسى –عين الطريق-

اختبار في مـــادة الريـــاضيـــات — المدة: 04 ســاعــات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوَل:(04.5 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(1;-1;2)$ ، $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1. أ. بيَن أنَ النقط A ، B و C تعيَن مستو نرمز له بـ (P).

ب. برّر أنَ (P) ذو المعادلة: $x+y+z-2=0$.

جـ. تحققَ أنَ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (P).

2. لتكن (Γ) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و H منتصف القطعة $[AB]$.

أ. بيَن أنَ المثلث ABC قائم في C.

ب. استنتج أنَ H مركز الدائرة (Γ).

3. ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) والذي يشمل النقطة H .

بيَن أنَ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يعطى بـ: $\alpha \in IR$ ، $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$.

4. لتكن M نقطة من المستقيم (Δ).

أ. بيَن أنَ $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=\mathrm{MC}$.

ب. بيَن أنَه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث $IA=ID$ ، يطلب تعيين إحداثياها.

جـ. استنتج أنَ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) ،

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقطتين A و B لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}-i$ و $z_B=\sqrt{3}+3i$.

1. اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل A إلى B ، ثمّ عيّن نسبته وزاويته.

2. نعرّف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي: $A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$.
نرمز بلاحقة A_n بالرمز z_n.
أ. أحسب لاحقة النقطة A_1.
ب. برهن أنّ: $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.
جـ. عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية والتي تكون من أجلها النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم (OA_1).
3. نعتبر المتتالية (d_n) والمعرفة كما يلي بـ : $d_0=A_0A_1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $d_n=A_{n+1}A_n$.
أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
ب. استنتج عبارة d_n بدلالة n.
ج. برهن أنّه من أجل $n\geq 13$، فإنّ النقطة A_n تكون خارج القرص الذي مركزه O ونصف قطره $r=2017$.
4. أحسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n=A_0A_1+A_1A_2+.....+A_nA_{n+1}$، ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty} L_n$.

التمرين الثَّالث:(04.5 نقاط)

أ - (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ و أساسها 4.
1) أكتب الحد العام u_n بدلالة n.
2) أحسب قيمة المجموع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n.
3) إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من (u_n) هو 1995 فما هو الحد الأول من هذه الحدود
ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على IN كما يلي : $v_n=(2n+1)\times 2^{(4n+5)}$
1) أ. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
ب. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1438^{2017} على 7؟
2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3.
3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 3\times 5\times .....\times(2n+1)=\dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$
2) أستنتج قيمة الجداء $P_n=v_0\times v_1\times ...\times v_n$ بدلالة n.

التمرين الرَّابع:(07 نقاط)

I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث : $(E)\ : y'-y=e^x-x$.
1. بيّن أنّ الدالة u حل للمعادلة (E) حيث u معرفة على IR بـ : $u(x)=xe^x+x+1$.
2. v دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على IR. بيّن أنَ الدالة $v+u$ حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة v حل للمعادلة التفاضلية (E') حيث: $(E')\ : y'-y=0$.
3. حل المعادلة التفاضلية (E')، ثمّ استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E).
4. عيّن الحل الخاص k للمعادلة التفاضلية (E) والذي يحقق $k(0)=0$.

II) g دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=(x-1)e^x+x+1$.

1. احسب $g'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثمَ استنتج أنَ الدالة g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

2. أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، بيَن أنَ : $g(x)\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

III) نعتبر الدالة العددية f المعرَفة على $IR-\{0\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيَن أنَ f دالة فردية.

2. أ. أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وفسَر النتيجة بيانيا.

ب. برهن أنَ: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المنحنى (C_f)؟

3. أ. بيَن أنَ: $f'(x)=\dfrac{-e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، ثمَ استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$.

ب. شكّل جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

4. أنشئ المنحنى (C_f) على $IR-\{0\}$ في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن الدالة h المعرفة على $[\ln 2,+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)-\dfrac{x}{e^x-1}$.

5. أ. بيّن أنّ الدالة h هي دالة اصلية للدالة f على المجال $[\ln 2,+\infty[$.

ب. احسب العدد A حيث : $A=\int_{\ln(2)}^{\ln(2017)} f(x)dx$ ، ماذا يمثّل هندسيا العدد A ؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04,5 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر تماما من1، نعتبر العددين a و b حيث: $a=37n+32$ و $b=26n-32$.

1. أ. برهن أنه إذا كان d قاسم للعددين a و b فإنّ d قاسم للعدد2016 .

ب. حلل العدد2016 إلى جداء عوامل أولية، ثمَ عيَن مجموعة قواسمه.

ج. ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$ ؟

* نريد البحث عن الأعداد الطبيعية n والتي تحقق: $PGCD(a,b)=2016$.

د. باعتبار أنَ: $PGCD(a,b)=2016$ ، برّر وجود عدد صحيح m حيث: $2016m=37n+32$.

2. نعتبر المعادلة (E) حيث: $2016m-37n=32$.

أ. باستعمال خوارزمية إقليدس عيَن العددين الصحيحين x و y حيث: $2016x-37y=1$.

ب. استنتج أنَ الثنائية $(m_0,n_0)=(-64,-3488)$ حل خاص للمعادلة (E).

ج. برهن أنَه مهما يكن n فإنَه يكتب على الشكل: $n=2016k-3348$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3. أ. تأكد من أنَ a و b يكتبان على الشكل: $a=2016(37k-64)$ و $b=2016(26k-45)$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

ب. برهن أنَه مهما يكن العدد الصحيح k فإنَ العددين a و b يحققان: $PGCD(a,b)=2016$.

ج. ما هو أصغر عددين طبيعيين a و b حيث: $PGCD(a,b)=2016$ ؟

التمرين الثاني:(04.5 نقاط)

1. أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) : $z^2-2z+4=0$.

ب. عيّن الكتابة الأسية لحلول المعادلة (E).

المستوي المركب المزوَد بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدائرة (Γ) ذات المركز O ونصف قطرها 2، ولتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A=2$.

2. أنشئ الدائرة (Γ) والنقطة A ، ثمّ النقطتين B و C التي لاحقتاهما: $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. ليكن $\theta\in]-\pi,\pi]$ والنقطة M من الدائرة (Γ) ذات اللاحقة: $z=2e^{i\theta}$. نرمز بـ N للنقطة من الدائرة (Γ) والتي تحقق: $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بيّن أنّ لاحقة N هي $z_N=2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ. تحقق من أنّ الدوران r ذو العبارة المركبة: $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب. لتكن F و K منتصفا القطعتين $[BM]$ و $[CN]$ على الترتيب، بيّن أنّ: $r(F)=K$.

جـ. استنتج طبيعة المثلث AFK .

5. أ. بيّن أنّ: $AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$.

ب. استنتج لاحقة النقط M بحيث يكون الطول AF أكبر ما يمكن، ثمّ انشئ المثلث AFK .

التمرين الثالث:(04 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،

نعتبر سطح الكرة (S) ذو المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1. بيّن أنّ سطح الكرة (S) ذو المركز $I(1,-1,0)$ ونصف القطر 5.

2. ليكن $J(-1,1,1)$ و (P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$.

أ. بيّن أنَ (P) هو مستو ذو المعادلة: $2x-2y-z+5=0$.

ب. بيّن أنّ تقاطع سطح الكرة (S) والمستوي (P) هو دائرة (C) مركزها J ونصف قطرها 4.

3. لتكن النقطة $A(-5,5,3)$ و (S') سطح الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $2\sqrt{13}$.

أ. بيّن أنّ A تنتمي إلى المستقيم (IJ) .

ب. بيّن أنّ : $AJ=6$.

4. لتكن M نقطة من الدائرة (C) .

أ. بيّن أنّ المثلث AJM قائم في J .

ب. استنتج أنّ $AM=2\sqrt{13}$.

5. عيّن تقاطع سطح الكرة (S') والمستوي (P) .

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=2\ln(x)-x+\dfrac{1}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. أ. تأكد أنّه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ ، فإنّ: $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

ب. أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

جـ. أحسب $f(1)$ ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل $x\in]0,+\infty[$.

د. بيّن أنّ النقطة $I(1,0)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

3. أ. ارسم المنحنى (C_f)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|+1$.

ب. باستعمال المنحنى (C') ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $|f(x)|+1=m^2$.

ج. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.

4. أ. ليكن $x>0$. تأكد من أنّ $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

ب. بملاحظة أنّ $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$ ، بيّن أنّ $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

II) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN^* بـ: $u_n = \ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{3}\right)+.....+\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. اعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} للحد u_3.

2. أ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

ب. بيّن أنّه من أجل كل $k \in IN^*$ فإنّ: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

جـ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$.

3. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l حيث $0,7 < l \leq 1$.

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول:

1) $\vec{AB}(0,-2,2)$; $\vec{AC}(-2,2,-2) \Rightarrow \vec{AB} \neq \lambda \vec{AC}$

ومنه النقط A، B و C تعين مستويا.

ب. لدينا

$$\begin{cases} 1+1+0-2=0 \Rightarrow A\in(P) \\ 1-1+2-2=0 \Rightarrow B\in(P) \\ 0+1+1-2=0 \Rightarrow C\in(P) \end{cases}$$

ومنه (P) ذو المعادلة: $x+y+z-2=0$

جـ - $1+1+4-2=2\neq 0 \Rightarrow D\notin(P)$

2. أ $\vec{CB}(1,-2,1)$ و $\vec{CA}(1,0,-1)$

$\Rightarrow \vec{CB}\cdot\vec{CA}=1-1=0 \Rightarrow \vec{CB}\perp\vec{CA}$

ومنه المثلث ABC قائم في C.

ب. المثلث ABC قائم في C و H منتصف $[AB]$

ومنه H مركز الدائرة (Γ).

3. الشعاع $\vec{n}(1,1,1)$ ناظمي لـ (P) و $H(1,0,1)$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ):

$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha ; \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$$

4. أ لدينا $M\in(\Delta)$ ومنه $M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$

$$\begin{cases} MA^2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2 \\ MB^2=\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2 \\ MC^2=(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2 \end{cases} \Rightarrow MA=MB=MC$$

ب - $I\in(\Delta)$ ومنه $I(\alpha+1,\alpha,1+\alpha)$

$IA=ID \Leftrightarrow IA^2=ID^2 \Leftrightarrow (1+\alpha)^2=(\alpha-3)^2$

$\Leftrightarrow (1+\alpha)^2=(\alpha-3)^2 \Leftrightarrow \alpha=1$

ومنه توجد نقطة وحيدة $I(2,1,2)$ من (Δ) حيث

$ID=IA$

جـ. النقطة $I\in(\Delta)$ من نتيجة السؤالين (4.أ و 4.ب)

ينتج لدينا $IA=IB=IC=ID$، ومنه النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) مركزها I ونصف قطرها $r=IA=\sqrt{5}$

التمرين الثاني:

1. العبارة المركبة للتشابه S هي: $z'=\sqrt{3}iz$.

مركزه O، ونسبته $k=\sqrt{3}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$.

2. أ. حساب z_1:

لدينا $A_1=S(A) \Rightarrow z_1=\sqrt{3}iz_A=\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$

ب. البرهان أن: $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

نستعمل البرهان بالتراجع: من أجل $n=0$، $z_0=z_A$

محققة. نفرض أن $z_n=2(\sqrt{3})^n\dots$ ونبرهن أن:

$$z_{n+1}=2(\sqrt{3})^{n+1}e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

لدينا

$$A_{n+1}=S(A_n) \Rightarrow z_{n+1}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z_n$$

$$=2(\sqrt{3})^{n+1}\cdot e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$$ وبالتالي محققة.

جـ. تعيين قيم n حتى تكون $A_n\in(OA_1)$:

$A_n\in(OA_1) \Rightarrow \arg(z_n)=\arg(z_1)$

$\Rightarrow n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi k' ; k'\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n=2k+1 ; k\in\mathbb{N}$. ($n$ عدد فردي).

3. أ. باستعمال الخاصية المميزة للتشابه:

$A_{n+2}A_{n+1}=\sqrt{3}A_{n+1}A_n \Rightarrow d_{n+1}=\sqrt{3}d_n$

ومنه (d_n) متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و $d_0=4$

ب. ومنه $d_n=4(\sqrt{3})^n$

جـ. حتى تكون النقطة A_n خارج القرص الذي مركزه O ونصف قطره $r=2017$ يجب أن يكون $OA_n>2017$

ومنه $OA_n=|z_n|=2(\sqrt{3})^n>2017$

$2(\sqrt{3})^n>2017 \Rightarrow (\sqrt{3})^n>\frac{2017}{2} \Leftrightarrow n\ln\sqrt{3}>\ln\left(\frac{2017}{2}\right)$

$\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{2017}{2}\right)}{\ln(\sqrt{3})}\approx 12{,}59 \Rightarrow \boxed{n\geq 13}$ ومنه

4. حساب L_n:

$L_n=d_0+d_1+d_2+\dots+d_n$ مجموع حدود متتالية هندسية

$=d_0\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]$

$=\frac{4}{\sqrt{3}-1}\left[(\sqrt{3})^{n+1}-1\right] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} L_n=+\infty$

التمرين الثالث:

U_n متتالية حسابية حدها الأول $U_0=5$ وأساسها $r=4$

U_n هي: $U_n = nr + U_0 = \boxed{4n+5}$

حساب $S_n = U_0+U_1+\dots+U_n$:

مجموع متتالية ح: $S_n = U_0+U_1+\dots+U_n$

$= \frac{(n+1)}{2}\left[U_n+U_0\right]$

$= \frac{(n+1)}{2}(5+4n+5) = \frac{(n+1)}{2}(4n+10)$

$S_n = (n+1)(2n+5)$

إذا كان مجموع 7 حدود متعاقبة من U_n هو 1995

تعيين الحد: $U_p+U_{p+1}+U_{p+2}+U_{p+3}+U_{p+4}+U_{p+5}+U_{p+6}$

$= 1995$ ومنه

عدد الحدود

$= \frac{(p+7-p)}{2}\left(U_p+U_{p+6}\right)$

$= \frac{7}{2}\left(4p+5+4(p+6)+5\right)$

$= \frac{7}{2}\left[8p+34\right] = 7(4p+17) = 1995$

$\Rightarrow 7(4p+17) = 1995 \Rightarrow p = 67$

ومنه الحد الأول هو U_{67} بحيث تكون 7 حدود متعاقبة ابتداء منه مجموعها هو 1995 .

ب) لتكن V_n: $V_n = (2n+1).2^{4n+5}$

1) بواقي قسمة 2^n على 7:

$$\begin{cases} 2^0 \equiv 1\,[7] \\ 2^1 \equiv 2\,[7] \\ 2^2 \equiv 4\,[7] \\ 2^3 \equiv 1\,[7] \end{cases} \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1\,[7] \Rightarrow 2^{3k+\alpha} \equiv 2^{\alpha}\,[7]$$

$\Rightarrow 2^{3k+\alpha} \equiv 2^{\alpha}\,[7]\ \alpha\in\{0,1,2\}$

ومنه البواقي دورية ودورها 3 .

ب) باقي 1438^{2017} على 7:

$1438 \equiv 3\,[7] \Rightarrow 1438 \equiv -4\,[7]$

$\Rightarrow 1438^{2017} \equiv (-4)^{2017}\,[7]$

$(-4)^{2017} \equiv (-2^2)^{2017}\,[7] \Rightarrow$

$\equiv -2^{2\times 2017}\,[7] \Rightarrow \equiv -2^{4034}\,[7]$

$\equiv -2^{3(1344)+2} \equiv -4 \equiv 3\,[7]$.

ومنه باقي 1438^{2017} على 7 هو $\boxed{3}$

2) تعيين قيم n بحيث يكون باقي V_n على 7 هو 3:

معناه: $V_n \equiv 3\,[7] \Leftrightarrow (2n+1)2^{4n+5} \equiv 3\,[7]$

لدينا

$(2n+1)\,2^{4n+5} \equiv 3\,[7] \Leftrightarrow (2n+1)\,\underbrace{2^{3n+3}}_{1}.\,2^{n+2} \equiv 3\,[7]$

$\Leftrightarrow (2n+1).\,2^{n+2} \equiv 3\,[7]$

من أجل $n=3k$:

$\Rightarrow (6k+1)\,2^{3k+2} \equiv 3\,[7]$

$\Leftrightarrow (6k+1).\,4 \equiv 3\,[7] \Leftrightarrow 24k+28 \equiv 3\,[7]$

$\Leftrightarrow 8k \equiv 1\,[7] \Rightarrow k \equiv 1\,[7]$

ومنه $k = 7\alpha+1$ ، $\alpha\in\mathbb{N}$ ومنه

$\boxed{n = 3(7\alpha+1) = 21\alpha+3\ ;\ \alpha\in\mathbb{N}}$

من أجل $n=3k+1$:

$(2n+1)\,2^{n+2} \equiv (2(3k+1)+1)\,\underbrace{2^{3k+3}}_{1} \equiv 3\,[7]$.

$\Leftrightarrow (6k+3) \equiv 3\,[7] \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k+1 \equiv 1\,[7] \Leftrightarrow 2k \equiv 0\,[7]$

$\Rightarrow k \equiv 0\,[7] \Rightarrow k = 7\alpha,\ \alpha\in\mathbb{N}$.

ومنه:

$\boxed{n = 3(7\alpha)+1 = 21\alpha+1\ ;\ \alpha\in\mathbb{N}}$

من أجل $n=3k+2$:

$(2n+1)\,2^{n+2} \equiv (2(3k+2)+1)\,2^{3k+4} \equiv 3\,[7]$

$\Rightarrow (6k+5).\,2^{3(k+1)+1} \equiv 3\,[7]$.

$\Rightarrow (6k+5)\,2 \equiv 3\,[7]\ \dots\ +(7)$

$(6k+5).\,2 \equiv 10\,[7] \Rightarrow$

$P_n = 1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)\times 2^{U_0}\times 2^{U_1}\times\dots\times 2^{U_n}$

$= 1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)\cdot 2^{U_0+U_1+\dots+U_n}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}\times 2^{S_n} = \boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\cdot 2^{(n+1)(2n+5)}}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{n!}\cdot 2^{(2n^2+6n+5)}$

التمرين الرابع ؟

I/ 1) $U(x) = xe^{x}+x+1 \Rightarrow U'(x) = (x+1)e^{x}+1$

$\Rightarrow \boxed{U'(x)-U(x) = e^{x}-x}$ ومنه U تحقق (E).

2) U + v حل لـ E معناه:

$(U+v)'-(U+v) = e^{x}-x$

$\Rightarrow U'+v'-U-v = e^{x}-x \Rightarrow \underbrace{U'-U}_{=e^{x}-x}+v'-v = e^{x}-x$

$\Rightarrow \boxed{v'-v=0}$ ومنه v تحقق المعادلة (E').

3) حلول (E') هي

$y'=y \Rightarrow y = Ce^{x}$

$\Rightarrow v(x) = Ce^{x} ; C\in\mathbb{R}$.

ومنه U + v حل للمعادلة (E) نستنتج أن

$U(x)+v(x) = xe^{x}+x+Ce^{x}+1$

$= (x+C)e^{x}+x+1 ; C\in\mathbb{R}$.

هو حل المعادلة التفاضلية (E).

K تحقق (E) بحيث: $k(0)=0$ معناه:

$$\begin{cases} k(x) = (x+C)e^{x}+x+1 \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C+1=0 \Rightarrow \boxed{C=-1}$

ومنه الدالة $k(x)$ هي:

$\boxed{k(x) = (x-1)e^{x}+x+1} = g(x)$

$\boxed{\text{الصفحة } 03}$

$\Rightarrow (6k+5)2 \equiv 3\,[7] \Rightarrow (6k+5)\cdot 2 \equiv 10\,[7]$

$\Rightarrow (6k+5) \equiv 5\,[7] \Rightarrow 6k \equiv 0\,[7]$

$\Rightarrow k \equiv 0\,[7] \Rightarrow k = 7\alpha ; \alpha\in\mathbb{N}$

ومنه $\boxed{n = 3(7\alpha)+2 = 21\alpha+2 ; \alpha\in\mathbb{N}}$

3) البرهان بالتراجع:

$1\times3\times5\times\dots\times(2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$

$$\begin{cases} n! = 1\times2\times3\times\dots\times n \\ 0! = 1! = 1 \end{cases}$$

من أجل $n=0$:

$1 = \dfrac{(2(0)+1)!}{2^0\times 0!} = 1$

محققة.

نفرض أن:

$1\times3\times5\times\dots\times(2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$

ونبرهن أن:

$1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)\times(2n+3) = \dfrac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$

$2(n+1)+1 = 2n+3$

لدينا

$1\times3\times5\times\dots\times(2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$

$\Rightarrow 1\times3\times5\times\dots(2n+1)\cdot(2n+3) = \dfrac{(2n+1)!\times(2n+3)}{2^n\cdot n!}$

$= \dfrac{(2n+1)!\times(2n+2)\cdot(2n+3)}{2^n\times n!\times(2n+2)}$

$= \dfrac{(2n+3)!}{2^n\times n!\times 2(n+1)} = \dfrac{(2n+3)!}{2\times 2^n\times n!\times(n+1)}$

$= \dfrac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n محققة حسب فرضية التراجع

4) استنتاج قيمة الجداء:

$P_n = V_0\times V_1\times\dots\times V_n$

$= (1\times 2^{U_0})\times(2+1)2^{U_1}\times\dots\times(2n+1)2^{U_n}$

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) g معرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x+x+1$.

1. حساب $g'(x)$: $g'(x)=xe^x+1$

g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ $\Leftarrow g'(x)>0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ولدينا $g(0)=0$

ومنه، من أجل كل x من $[0,+\infty[$ لدينا: $g(x)\geq 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

II) f معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

1. تبيين أنَ f دالة فردية:

. **من أجل كل $x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ فإنَ** $-x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ ، **يكفي إثبات أنَه من أجل كل x من** $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$: $f(-x)=-f(x)$

نذكر أنَ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ ، $\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$ و $(e^x-1)^2=(1-e^x)^2$:

$$f(-x)=\frac{-xe^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}=\frac{-x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^2}=\frac{-x}{\frac{e^x(1-e^x)^2}{e^{2x}}}=\frac{-x}{e^{-x}(e^x-1)^2}=\frac{-xe^x}{(e^x-1)^2}=-f(x)$$

ومنه من أجل x من $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ الدالة f دالة فردية.

2. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$: حالة عدم تعيين $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\dfrac{0}{0}$ إزالتها:

نذكر أنَ $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0 \\ >}}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=1$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{xe^x}{\frac{x^2(e^x-1)^2}{x^2}}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{e^x}{x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

التفسير البياني: ومنه المستقيم $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب. البرهان أنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: حالة عدم تعيين........ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{+\infty}{+\infty}$

إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x(e^x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{(e^x-1)^2}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{e^x(e^x-1)^2}{(e^x)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\frac{1}{(1-e^{-x})^2}=0$$

نذكر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ ومنه

نستنتج أنَ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم $y=0$ كمستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

3. أ. تبيين أنَ: $f'(x)=\dfrac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$:

نذكر أنَ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)^2-2xe^{2x}(e^x-1)}{(e^x-1)^4}=\frac{(e^x-1)[(e^x-1)(e^x+xe^x)-2xe^{2x}]}{(e^x-1)^4}=\frac{e^{2x}+xe^{2x}-e^x-xe^x-2xe^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$=e^x\frac{e^x-xe^x-x-1}{(e^x-1)^3}=\frac{-e^x((x-1)e^x+x+1)}{(e^x-1)^3}=\frac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$$

ومنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ فإنَ $f'(x)=\dfrac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$:

لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$ فإنَ $e^x-1>0$ و $e^x>0$ (حسب خواص الدالة الأسية e^x)

وأيضا من جدول تغيرات الدالة g فإنَ: $g(x)>0$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ فإنَ $f'(x)<0$

ب. جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$:

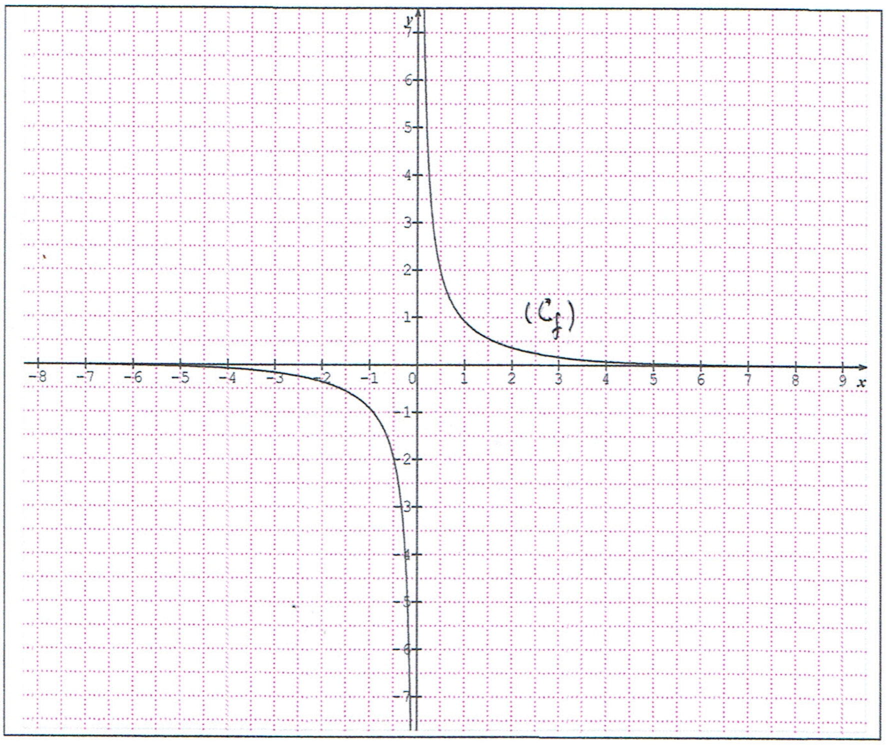
x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	0 $\searrow$ $+\infty$

(الصفحة 04)

4. إنشاء المنحنى (C_f) على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ نرسم جزء المنحنى (C_f) على $]0,+\infty[$

أما جزء المنحنى (C_f) **على المجال $]-\infty,0[$ فهو نظير جزء المنحنى** (C_f) على المجال $]0,+\infty[$ **لأنَ الدالة f دالة فردية.**



تبيين أن h دالة أصلية لـ f على $]\ln 2, +\infty[$

لدينا h معرفة على $]\ln 2, +\infty[$

و تحقق: $h'(x) = f(x)$

ومنه h دالة أصلية لـ f على $]\ln 2, +\infty[$

ب- حساب A:

$$A = \int_{\ln(2)}^{\ln(2017)} f(x)\,dx = \Big[h(x) \Big]_{\ln(2)}^{\ln(2017)}$$

$$= h(\ln 2017) - h(\ln 2).$$

$$h(\ln(2017)) = \ln\left[\frac{e^{\ln 2017}}{e^{\ln 2017} - 1}\right] - \frac{\ln(2017)}{e^{\ln 2017} - 1}$$

$$= \ln\left(\frac{2017}{2017-1}\right) - \frac{\ln(2017)}{2017-1}$$

$$= \ln\left(\frac{2017}{2016}\right) - \frac{\ln(2017)}{2016}.$$

$$h(\ln 2) = \ln\left(\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1}\right) - \frac{\ln 2}{e^{\ln 2} - 1}$$

$$h(\ln 2) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) - \ln 2 = 0$$

الصفحة 05

$$\Rightarrow A = h(\ln 2017) - h(\ln 2)$$

$$\boxed{A = \ln\left(\frac{2017}{2016}\right) - \frac{\ln(2017)}{2016}}$$

يمثل A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذان معادلتاهما على الترتيب $x = \ln(2)$ و $x = \ln(2017)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

$a = 37n+32$ و $b = 26n-32$ ، $n \geq 2$

1. أ. البرهان أن: $d/2016$

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \xRightarrow{\text{خواص}} d/a+b \Rightarrow d/63n \xRightarrow{\text{خواص}} d/63 \Rightarrow d/63\times 32 \xRightarrow{\text{خواص}} \boxed{d/2016}$$

$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7^1$

$$D_{2016} = \{\underbrace{1,2,4,8,3,9,7,\ldots\ldots,252,1008,2016}_{(5+1)(2+1)(1+1)=36 \text{ قاسم}}\}$$

ب. ومنه القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$ هي قواسم 2016 (ما عدا 1) (لأن $n \geq 2$).

جـ. باعتبار أن $PGCD(a,b) = 2016$ معناه يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث $a \equiv 0[2016] \Rightarrow$

$a = m(2016) \Leftrightarrow 2016m = 37n+32$.

2. نعتبر المعادلة (E) بحيث: $2016m - 37n = 32$

أ. تعيين x و y باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$\begin{cases} 2016 = 37(54)+18 \\ 37 = 18\times 2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 = 2016-54(37) \\ 1 = 37-2(18) \end{cases}$$

ومنه

$1 = 37-2[2016-54(37)]$

$= -2(2016)+109(37) = (-2)2016-(-109)(37)$

$2016(-2)-(-109)(37) = 1$

ومنه $\Rightarrow \boxed{(x,y) = (-2,-109)}$

ومنه لدينا

$2016x - 37y = 1$

$\Rightarrow 2016(32x) - 37(32y) = 32$

ومنه الثنائية $(32x, 32y)$ حل المعادلة E:

$(32x, 32y) = (-64, -3488) = (m_0, n_0)$

جـ. لدينا

$$\begin{cases} 2016m - 37n = 32 \\ 2016m_0 - 37n_0 = 32 \end{cases}$$

01 نقطة

$\Rightarrow 2016(m-m_0) - 37(n-n_0) = 0$

$\Rightarrow 2016(m-m_0) = 37(n-n_0)$ $(PGCD(2016,37)=1)$

$\xRightarrow{\text{غوص}} 2016 / n-n_0 \Rightarrow n-n_0 = 2016k \; ; k\in\mathbb{Z}$

ومنه $n = 2016k+n_0 = 2016k-3488 \; ; k\in\mathbb{Z}$

3. أ. التأكد من أن:

$$\begin{cases} a = 2016(37k-64) \\ b = 2016(26k-45) \end{cases}$$

بتعويض قيمة n في a و b نجد

ب. البرهان أنه من أجل كل k يكون $PGCD(a,b) = 2016$:

من تعريف PGCD:

نقول أن $PGCD(a,b) = \alpha$ إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} a = \alpha a' \\ b = \alpha b' \end{cases}$ و $PGCD(a',b') = 1$

ومنه يكفي إثبات أن $37k-64$ و $26k-45$ أوليان فيما بينهما

لأنه لدينا: $\begin{cases} a' = 37k-64 \\ b' = 26k-45 \end{cases}$

$26a' - 37b' = 1$

حسب بيزو

نستنتج لدينا a' و b' أوليان فيما بينهما.

ومنه $PGCD(a,b) = 2016$.

جـ. أصغر عددين طبيعيين a و b هما:

من أجل $k=2$:

$$\begin{cases} a = 2016(37(2)-64) \\ b = 2016(26(2)-45) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2016(10) = 20160 \\ b = 2016(7) = 14112 \end{cases}}$$

التمرين الثاني:

1. أ:

$z^2-2z+4=0 \Rightarrow \Delta=(2\sqrt{3}i)^2$

$\Rightarrow z_1 = 1-i\sqrt{3}\ ;\ z_2=\overline{z_1}$

ب. الكتابة الأسية:

$z_1 = 2e^{-i\pi/3}\ ;\ z_2=2e^{i\pi/3}$

3. لدينا $N\in(\Gamma)$ أي $|z_N|=2$ ومنه

من جهة أخرى:

$\arg(z_N) = (\vec{u},\vec{ON})+2k\pi$

$= (\vec{OM},\vec{ON})+(\vec{u},\vec{OM})+2k\pi$

$= \pi/3+\theta+2k\pi = (\theta+\frac{\pi}{3})+2k\pi$

ومنه $z_N = |z_N|\, e^{i\arg(z_N)} = 2e^{i(\theta+\pi/3)}$

4. أ: العبارة المركبة لـ r:

$z'-z_A = e^{i\pi/3}(z-z_A)$

$\Rightarrow z' = e^{i\pi/3}(z-z_A)+z_A = e^{i\pi/3}(z-2)+2$

$$\boxed{z' = e^{i\pi/3}z - 2e^{i\pi/3}+2}$$

ب: لاحقتا K, F منتصفي $[BM]$ و $[CN]$:

$$\begin{cases} z_F = \dfrac{z_B+z_M}{2} = e^{i\theta}+e^{i\pi/3} \\ z_K = \dfrac{z_C+z_N}{2} = e^{i(\theta+\pi/3)}+e^{-i\pi/3}\end{cases}$$

نعوض z_F في عبارة r نجد:

$z' = e^{i\pi/3}\left(e^{i\theta}+e^{i\pi/3}\right) - 2e^{i\pi/3}+2 = e^{i(\theta+\pi/3)} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\pi/3}+2$

$= e^{i(\theta+\pi/3)} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2$

$= e^{i(\theta+\pi/3)} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\theta+\pi/3)}+e^{-i\pi/3} = \boxed{z_K}$

$\Rightarrow r(F)=K$

ج: استنتاج طبيعة المثلث:

لدينا $r(F)=K \Rightarrow \begin{cases} AF=AK \\ (\vec{AF},\vec{AK}) = \frac{\pi}{3}+2p\pi\ ;\ p\in\mathbb{Z}\end{cases}$

ومنه AFK مثلث متقايس الأضلاع

5. أ. تبيين أن: $AF^2 = 4-2\sqrt{3}\cos(\theta+\pi/6)$

$AF^2 = \left|e^{i\theta}+e^{i\pi/3}-2\right|^2 = \cancel{\left(e^{i\theta}+e^{i\pi/3}-2\right)\left[\overline{e^{i\theta}+e^{i\pi/3}-2}\right]}$

$= \left|\cos\theta+i\sin\theta+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-2\right|^2$

$= \left|\left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)+i\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2$

$= \left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \cos^2\theta+\frac{9}{4}-3\cos\theta+\sin^2\theta+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\sin\theta$

$= 4-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta.$

نذكر أنّ (درس 2 ثانوي في الزوايا الموجهة والحساب المثلثي)

$$\begin{cases} a\cos x+b\sin x = r\cos(x-\alpha) \quad (\bigstar) \\ r=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\cos(\alpha)=\dfrac{a}{r}\\ \sin(\alpha)=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

أنظر ص 02

$= 4-(\underbrace{3}_{a}\cos\theta\underbrace{-\sqrt{3}}_{b}\sin\theta)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=-\pi/6}$

وهو المطلوب

$\Rightarrow AF^2 = 4-2\sqrt{3}\cos(\theta+\pi/6)$

ب. يكون AF^2 أعظميا إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases}\cos(\theta+\pi/6)=-1\\ \theta\in]-\pi,\pi]\end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta=5\pi/6}$$

$\Rightarrow z_M = z = 2e^{i\theta} = 2e^{i5\pi/6}$

ملاحظة فقط: استعملنا هذه الطريقة ★ لقصرها فقط، يمكن أيضا استعمال دساتير التحويل!

التمرين الثالث: بكالوريا تونسي 2015

1. تبيين أن S سطح الكرة ذو المركز $I(1,-1,0)$ و $r=5$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-0)^2=5^2$$

2. ليكن $J(-1,1,1)$

أ. تبيين أن (P) هو مستو:

$\vec{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$;

$$M\in(P)\Leftrightarrow \vec{JI}\cdot\vec{IM}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-2y-z+5=0$$

ومنه (P) هو المستوي ذو المعادلة (P).

ب: تقاطع (S) و (P):

$$d(I,(P))=\frac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5 \Rightarrow (S)\cap(P)=(C)$$

~~ومنه~~ و يتقاطعان وفق دائرة نصف قطرها

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$$

ومركزها المسقط العمودي لـ I على المستوي (P)

من جهة أخرى: $J\in(P)$ و $\vec{JI}$ ناظمي.

ومنه نستنتج أن J المسقط العمودي لـ I

ومنه J مركز (C).

3. أ: $A(-5,5,3)$: تبيين أن $A\in(IJ)$

$$\vec{AI}(6,-6,-3) \text{ و } \vec{JI}(2,-2,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{AI}=3\vec{JI} \Rightarrow \vec{AI}\parallel\vec{JI} \Rightarrow A\in(IJ)$$

ب: $AJ=\sqrt{16+16+4}=6$.

4. لدينا أن

$$\begin{cases} A\in(IJ) \\ (IJ)\perp(P) \\ M\in(C)\subset(P) \end{cases}$$

ومنه المثلث AJM قائم في J.

في المثلث AJM قائم في J، تطبيق نظرية فيثاغورس:

$$AM=\left[AJ^2+JM^2\right]^{1/2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$$

5. من أجل كل نقطة $M\in(C)$، لدينا $2\sqrt{13}=AM$

ومنه $M\in(S')$، ومنه $(C)\subset(S')$ ولدينا أيضا

$(C)\subset(P)$ ومنه نستنتج أن تقاطع (P) و (S')

هي الدائرة (C) نفسها.

التمرين الرابع:

$$f(x)=2\ln(x)-x+\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty+\infty \quad : \text{ح ع ت}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2\ln x-x+\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[2x\ln x-x^2+1\right]=\frac{1}{0^+}\left[0-0+1\right]$$

$$\boxed{=+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty \quad \text{ح ع ت}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2\ln x-x+\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2\ln x}{x}-1+\frac{1}{x^2}\right]$$

$$=+\infty[-1]=\boxed{-\infty}$$

2. أ.

$$f'(x)=\left(2\ln x-x+\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-x^2-1}{x^2}=\frac{-(1+x^2-2x)}{x^2}$$

$$=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\leq 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$+\infty$	0		$-\infty$

(العلامة 03 ن)

جـ - حساب $f(1)$ واستنتاج اشارة $f(x)$،

$$f(1) = 2\ln 1 - 1 + \frac{1}{1} = 0$$

$\Rightarrow$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

د - تبيين أن $I(1,0)$ نقطة انعطاف:
لدينا المشتقة الأولى انعدمت في 1 دون تغيير الإشارة، ومنه $I(1,0)$ نقطة انعطاف

حساب مساحة الحيز المستوي:

أولاً: لاحظ أن $(x\ln x - x)' = \ln x$ (معطاة).

ومنه $x\ln x - x$ دالة أصلية لـ $\ln x$ في $]0,+\infty[$

$$\Rightarrow F(x) = 2(x\ln(x) - x) - \frac{x^2}{2} + \ln x$$

دالة أصلية لـ f على مجموعة تعريفها.

ونلاحظ أن $f(x) < 0$ من أجل كل $x > 1$ أي:

$$S = |F(e) - F(1)| = \int_1^e -f(x)\,dx$$

$$= |2(e\ln e - e) - \frac{e^2}{2} + \ln e - F(1)|$$

$$= 2 - \frac{e^2}{2} + 1 - 5/2$$

$$\boxed{S = e - \frac{e^2}{2} - 3/2}$$

4. أ. إثبات أن:

$$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = 2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{1+1/x}}$$

$$= 2\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}\right] - \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}$$

$$= \frac{2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sqrt{\frac{x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{-(x+1)+x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$\boxed{= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}}$$

وهو المطلوب

3 - ب . المناقشة:

لتسهيل عملية المناقشة نضع $m^2 = \alpha > 0$

$|f(x)| + 1 = h(m)$

ومنه المناقشة أصبحت أفقية . $h(x) = \alpha$

$\alpha \in [0,1[$ لا توجد حلول $\Leftrightarrow m \in]-1,1[$

$\alpha = 1$ حل وحيد $\Leftrightarrow m = \pm 1$.

$\alpha \in]1,+\infty[$ حلين مختلفين في الإشارة $\Leftrightarrow m \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

ب. لاحظ أن $\sqrt{1+\frac{1}{n}}>1$

ومنه $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow \cancel{\ln(1+} f\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\leq 0$

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

II لدينا $U_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\dots+\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1. أ. قيمة مقربة لـ U_3 : (ثلاثة أرقام عشرية)

$U_3=\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$=\ln^2(2)+\ln^2(3/2)+\ln^2(4/3)$

$\boxed{U_3\simeq 0,727}$

2. أ. تبين أن $U_n\nearrow$

$U_{n+1}-U_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\dots+\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\dots+\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0\ \left(1+\frac{1}{n+1}>1\right)$

ومنه U_n متزايدة $\Rightarrow U_{n+1}-U_n>0$

ب. تبين أنه لكل $k\in\mathbb{N}^*$:

$\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ محققة.

جـ. تبين أن $U_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$

لدينا $0<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; $n>0$

$\Rightarrow \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2=\frac{1}{n(n+1)}$.

$\Rightarrow \boxed{\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n(n+1)}}$; $n>0$.

ومنه

$0<\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)\leq\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}$

$0<\ln^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{2(2+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}$

$0<\ln^2\left(1+\frac{1}{3}\right)\leq\frac{1}{3(3+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}$

$\vdots$

$0<\ln^2\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leq\frac{1}{(n-1)(n)}=\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{(n-1)+1}$

$0<\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$\ln^2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\dots+\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1-\frac{1}{n+1}$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ نجد: $U_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$.

3. لدينا $U_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$

ومنه U_n محدودة من الأعلى بـ (1): $\Rightarrow U_n\leq 1$

وأيضا متزايدة ومنه U_n متقاربة، نحو:

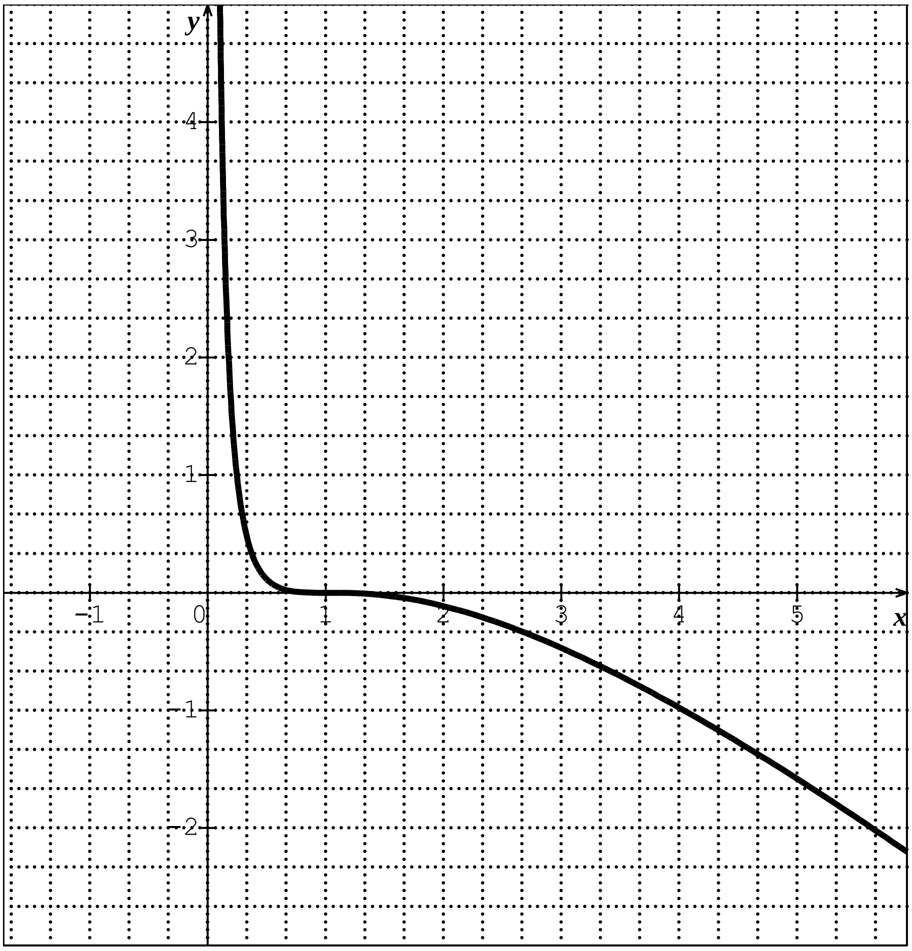
$\lim_{n\to+\infty}U_n=\ell\geq U_3=0,727>7$

ومنه $\boxed{0,7<\ell\leq 1}$

انتهى وبالتوفيق في البكالوريا

الصفحة

f منحنى الدالة (C_f)



المنحنى (C') الممثل للدالة $1+|f|$.