الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان لوطني لامتحانات والمسابقات

الامتحان التجريبي لبكالوريا : 2017 — الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات	معامل المادة : 7	مدة الاختبار : 4 سا

*على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين *
وفي مايلي نص الموضوعين :

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) بوضع $1-x^2=t$ احسب التكامل التالي : $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ (لاحظ أن : $\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t\sqrt{t}$)

2) لتكن v_n المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $v_0=\frac{\pi}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0\le v_n\le\frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية v_n
- باستعمال التكامل بالتجزئة بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $v_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}\times v_n$

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $\frac{n+1}{n+4}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}\le 1$, ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}$

- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $v_n\times v_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$
- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sqrt{n}\times v_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

ليكن α عدد مركب غير معدوم طويلته r وعمدته θ

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_α) ذات المجهول Z حيث : $z^3+\alpha z^2-\overline{\alpha}z-1=0$

- بين انه إذا كان z_1 , z_2 و z_3 حلول للمعادلة (E_α) فان : $z_1\times z_2\times z_3=1$
- بين انه إذا كان z حل للمعادلة (E_α) فان $\frac{1}{\overline{z}}$ حل لها أيضا

2) نضع $|\alpha|=1$: بين أن : $-\alpha$ حل مضاعف للمعادلة (E_α) ثم استنتج الحل الثالث بدلالة θ

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^3-(\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}i)z^2+(\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}i)z-2=0$

- نضع z_A حلا مضاعفا للمعادلة السابقة : اكتب z_B الحل الثالث للمعادلة على الشكل الآسي ثم استنتج عمدة لـ z_A
- عين القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$

4) عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة : $16x-3y=4$ (لاحظ أن : $(1,4)$ حل خاص)

- عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $i(z_A)^n$ عدد حقيقي موجب

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر (s_λ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء ذات الوسيط الحقيقي λ والتي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2(\lambda+1)x-2(\lambda+1)y-(2+\lambda)z-6-\lambda=0$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي λ فان (s_λ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_λ ونصف قطرها r_λ بدلالة λ

2) عين مجموعة النقط I_λ لما يتغير λ في مجموعة الأعداد الحقيقية

3) عين اصغر نصف قطر للسطوح الكرة (s_λ) من اجل كل عدد حقيقي λ

4) بين انه مهما يتغير λ في مجموعة الأعداد الحقيقية فان جميع سطوح الكرة (s_λ) تشمل دائرة ثابتة يطلب تعين عناصرها المميزة

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن الدالة g المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x بـ : $g(0)=0$ و $g(x)=x^2e^{\frac{-1}{x^2}}$ وليكن (ξ) منحاها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة g دالة زوجية

2) ادرس است مرارية الدالة g عند 0

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة g عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
- احسب : $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x^2-1$ وليكن (ς) منحاها البياني في المعلم السابق

- بين أن : $\lim_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- بين انه من اجل $t\epsilon\mathbb{R}$ فان : $e^t\geq t+1$ ثم استنتج الوضع النسبي بين (ς) منحنى الدالة h و (ξ) منحنى الدالة g

4) ارسم (ξ) و (ς)

5) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر u_n المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n=\int_{e^{e^{2n}}}^{e^{e^{4n+4}}} g(\frac{1}{\sqrt{\ln x}})dx$

- أعط تفسير هندسي للعدد : u_0
- اكتب u_n بدلالة n ثم احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $s_n=u_0+u_1+.........+u_n$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأول : (4 نقاط)

b, a و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$

1) عين الأعداد b, a و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون : $b + c = \overline{46}$ و $bc = \overline{545}$

2) نعتبر المعادلة $21x - 17y = 8$ ...(E) حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين

- عين الثنائية (x_0, y_0) حل خاص للمعادلة (E)
- حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (E)

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13

- بين انه إذا كان (α, β) حل للمعادلة (E) فان : $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0[13]$

4) بين انه إذا كان (x, y) حل للمعادلة (E) و $x \equiv 0[4]$ فان : $y \equiv 0[4]$

- عين (x, y) حلول المعادلة (E) التي يكون من اجلها : $p\gcd(x, y) = 4$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3,1,0), B(1,2,0), C(3,2,1)$ و $D(0,0,m)$ حيث m وسيط حقيقي موجب

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos(A\hat{B}C)$ و $\sin(A\hat{B}C)$

- احسب مساحة المثلث ABC
- بين ان الشعاع $\vec{n}(1,2,-2)$ ناضمي للمستوي (ABC) ثم عين معاد A لة ديكارتية له

2) بين ان $ABCD$ رباعي وجوه وان حجمه : $v_{ABCD} = \dfrac{2m+3}{6}$

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ والتي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

- بين انه من اجل كل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعين عناصرها المميزة

4) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m)

- اكتب معادلة المستوي (P) الموازي للمستوي (ABC) ويمس (S_m)

التمرين الثالث : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و β_0 ذات اللاحقتين على الترتيب z_A و z_0 حيث : $A\beta_0 = 4$

وليكن (T) التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n نعتبر β_n لاحقة z_n حيث : $\beta_{n+1} = T(\beta_n)$ ومن اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتاليتين u_n و v_n المعرفتين بـ :

$u_n = A\beta_n$ و $v_n = \arg(z_n - z_A)$ مع $(z_n \ne z_A)$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : u_n متتالية هندسية و v_n متتالية حسابية يطلب تعين أساس لكل منهما

2) أنشئ بطريقة هندسية β_1 (موضحا الطريقة المتبعة) ثم بين أن : $\beta_0\beta_1 = 2\sqrt{7}$

3) اكتب u_n بدلالة n ثم احسب الجداء P_n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times ....\times u_n$

4) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول (x,y) حيث : $2x-3y=1$ (لاحظ أن : $(2,1)$ حل خاص)

5) عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $\arg(\frac{z_n - z_A}{z_0 - z_A})^2 = \frac{2\pi}{3}$ مع $(z_n \neq z_A)$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1) g الدالة المعرفة بـ $g(1)=1$ ومن اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$ وليكن (δ) منحاها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

- بين أن الدالة g مستمرة على يمين 1
- نقبل أن : $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{g(x)-1}{x-1}) = -\frac{1}{2}$ فسر هذه النتيجة هندسيا
- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- بين انه من اجل $x \geq 1$ فان : $\ln x \leq x-1$
- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
- بين أن (δ) يقبل مماسا (Δ) يعامد المستقيم $y=2x$ يطلب تعين معادلة ديكارتية له

2) لتكن الدالة h المعرفة من اجل كل $x>1$ بـ : $h(x) = \frac{1}{\ln x}$ وليكن (ψ) منحاها البياني في المعلم السابق

- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-h(x)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- ادرس الوضع النسبي بين (δ) منحنى الدالة g و (ψ) منحنى الدالة h
- أنشئ كل من (ψ) , (δ) و (Δ)
- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $\frac{\ln x}{x-1}(mx - \frac{1}{2}x^2) - 1 = 0$

3) ليكن α عدد حقيقي اكبر تماما من 1 وليكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (δ) والمنحنى (ψ) والمستقيمين الذين معادلتهما : $x = e^{1+\frac{1}{\alpha}}$ و $x=e$

- احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم عين $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$
- بين أن : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(\alpha A(\alpha)) = 1$