على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04.5 نقاط)

1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة x : $4x \equiv 33[5]$.

2) أـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,,y)$: $(\mathrm{E})......4x-5y=33$.

بـ استنتج حلول الجملة : $\begin{cases}\lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4]\end{cases}$ حيث $\lambda \in \mathbb{Z}$

جـ عين كل الثنائيات $(x\,,y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق: $|x+y+3|<27$

3) أـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11

بـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1} \equiv 0[11]$

جـ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases}n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5]\end{cases}$

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 4 حيث $\alpha \neq 0$.

عين α و β بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1-2i)(z^2+4z+5)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A_0\,,A_1\,,A_2$ و Ω التي لواحقها على الترتيب:

$z_0=-1+2i$ ، $z_1=-2+i$ ، $z_2=-2-i$ ، $z_\Omega=i$ (وحدة الطول هي السنتيمتر)

1) ـ بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول النقطة A_0 إلى A_1 و يحول A_1 إلى A_2

ـ تحقق أن : $z'=(1+i)z+1$ عبارة مركبة للتشابه المباشر S ثم جد عناصره المميزة

2) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية النقط (A_n) بحيث : $A_{n+1}=S(A_n)$ و نسمي z_n لاحقة A_n

ـ علم النقط $A_0\,,A_1\,,A_2$ ثم أنشئ النقطتين $A_3\,,A_4$

ـ باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{n\pi}{4}i}(-1+i)+i$

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_n=\left\|\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right\|$

أـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|z_{n+1}-z_n|=\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$

بـ استنتج طبيعة المتتالية (u_n) و حدد عناصرها

جـ جد أكبر عدد طبيعي n_0 بحيث تكون النقطة A_{n_0} تنتمي إلى القرص الذي مركزه Ω و طول نصف قطره 2018

دـ نسمي l طول الخط المنكسر: $A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_{n+1}$ ، احسب l بدلالة n

التمرين الثالث : (04 نقاط)

I. كيس A يحوي كريتان تحملان الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 2 ، و كيس B يحوي كريتان تحملان الرقم2 و 3 كريات تحمل الرقم 3

لنعتبر التجربة العشوائية التالية : نأخذ كرية من الكيس A و نضعها في الكيس B ثم نأخذ كرية من الكيس B ونضعها في الكيس A.

لتكن الحوادث التالية : A_1 الكرية المسحوبة من الكيس A تحمل الرقم 1 ، A_2 الكرية المسحوبة من الكيس A تحمل الرقم 2

B_1 الكرية المسحوبة من الكيس B تحمل الرقم 1 ، B_2 الكرية المسحوبة من الكيس B تحمل الرقم 2

1) احسب ما يلي :

أ- احتمال وقوع A_1 ، ب- احتمال وقوع B_1 علما أن A_1 محققة ، جـ- بين أن : $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{12}$

2) بين أن : $P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{4}$

3) احسب احتمال أن يبقى الكيس A في وضعه الأصلي بعد التجربة .

II. نجمع محتويات الكيسين A و B في كيس واحد ، و نختار عشوائيا كرة منه

لنعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب رقم الكرية المسحوبة.

ــ عين قانون احتمال X و احسب أمله الرياضياتي

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ كما يلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ. أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

ب. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

جـ. شكل جدول تغيرات الدالة f .

2- برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

- ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3- أثبت ان النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

4- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{9}{20}$.

5- ارسم (Δ) و (C_f).

6- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$ كما يلي: $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + \ln\left|\frac{|x|-1}{|x|}\right|$ ،

و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- أدرس شفعية الدالة g .

ب- بين كيف يمكن رسم (C_g) المنحني للدالة g انطلاقا من (C_f). (رسم (C_g) غير مطلوب)

7- أ- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كلا من $\int_2^3 \ln(x)dx$ و $\int_2^3 \ln(x-1)dx$

ب- استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ، المستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (03.5 نقاط)

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
2. حلل العدد 2016 إلى جداء عوامل أولية،ثم إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2016^{2017}+2018^{2016}$ على 7
3. نعتبر (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدودها موجبة و حدها الأول u_0 بحيث : $\begin{cases} u_2+u_3=12 \\ u_2\times u_3=32 \end{cases}$

أ- أحسب كلا من u_2 و u_3 ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب- أوجد باقي قسمة $u_{n+1}-u_n$ على 7 من أجل $n=2017$.

ت- أثبت أن : $PGCD(u_{n+1};u_n)=2^n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

ثم استنتج بطريقة أخرى قيمتي كل من u_2 و u_3 .

التمرين الثاني : (05.5 نقاط)

1) نعتبر العدد المركب β حيث: $\beta=4\sqrt{2}(1+i)$.

- اكتب β على الشكل المثلثي.
- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $Z^3=\beta$ ......(1) .
- نعتبر Z_1,Z_2,Z_3 حلول المعادلة (1) ، برهن أن : $\frac{Z_1\times Z_3}{{Z_2}^2}=\frac{Z_2\times Z_3}{{Z_1}^2}=\frac{Z_1\times Z_2}{{Z_3}^2}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط A,B,C,D و H لواحقها على الترتيب

$Z_A=\alpha$ ، $Z_B=1+\frac{\alpha-1}{\alpha}i$ ، $Z_C=\alpha i$ ، $Z_D=-\frac{1}{\alpha}i$ و $Z_H=1+Z_D$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1

- تحقق أن $Z_B-Z_D=\overline{Z_D}(Z_A-Z_C)$ ثم بين أن : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_B-Z_D)\right)^{2016}=iZ_A\times Z_D$.
- استنتج أن المستقيمين (BD) و (AC) متعامدان .
- عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D ، ثم جد عناصره المميزة .
- بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهين ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

3) عين مجموعة النقط M التي لواحقها Z التي تتحقق: $\arg(\overline{Z}+i\alpha)=-\arg(Z_A-Z_C)+2\pi k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;3;4)$ ، $B(-1;4;4)$ ، $C(3;1;2)$

1) أ- بين أن النقط A ، B و C ليست على استقامية.

ب- بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ ناظم للمستوي (ABC) ، ثم عين معادلة ديكارتية لـه.

2) (P) مستوي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$ ، $\beta\in\mathbb{R}$

أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم بين أن (P) و (ABC) متعامدان .

ب- أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

3) لتكن $D(3;1;1)$ نقطة من الفضاء

- عين d_1 بعد النقطة D عن المستوي (P) و d_2 بعد النقطة D عن المستوي (ABC) .
- استنتج d_3 بعد النقطة D عن المستقيم (Δ) .

4) نعتبر الدائرة (C) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-2x-4y+1=0 \end{cases}$

- عين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي تحوي الدائرة (C) و مركزها Ω ينتمي إلى المستوي (P).

التمرين الرابع : (07 نقاط)

i. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-(1+x^2)e^{-x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

جـ- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) ثم ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1.8<\alpha<1.9$

4. أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6. احسب $f(3), f(0)$ ثم ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

7. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

ii. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1. أ- بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\to xe^{-x+1}$

ب- احسب I_1

2. أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(x+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب- احسب I_2

3. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

انتهى الموضوع الثاني

أستاذ المادة يتمنى لكم النجاح في شهادة البكالوريا