## الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

القسم:3 ر+3 ت ر المدة:1ساعة

**نص التمرين:**

نعتبرالدالة العددية $f$ المعرفة على $IR$ بـ : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0\,,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\gamma)$

3 / أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\gamma)$

4 / لتكن $h$ الدالة المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ وحيد ينتمي الى المجال $]1,2[$ يحقق أن : $h(\alpha)=0$

ب)استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحنى $(\gamma)$ ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحنى $(\gamma)$ و المماس $(\Delta)$

6 / لتكن الدالة $g$ المعرفة بـ : $g(x)=f(|x|)$ ، بين أن الدالة $g$ زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحنى $(C_g)$ انطلاقا من $(\gamma)$ ، ثم أرسمه في نفس المعلم

**بالتوفيق**

## الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

القسم:3 ر+3 ت ر المدة:1ساعة

**نص التمرين:**

نعتبرالدالة العددية $f$ المعرفة على $IR$ بـ : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $(\gamma)$ تمثيلها البياني

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0\,,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\gamma)$

3 / أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\gamma)$

4 / لتكن $h$ الدالة المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ وحيد ينتمي الى المجال $]1,2[$ يحقق أن: $h(\alpha)=0$

ب)استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحنى $(\gamma)$ ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحنى $(\gamma)$ و المماس $(\Delta)$

6 / لتكن الدالة $g$ المعرفة بـ : $g(x)=f(|x|)$ ، بين أن الدالة $g$ زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحنى $(C_g)$ انطلاقا من $(\gamma)$ ، ثم أرسمه في نفس المعلم

**بالتوفيق**

## تصحيح الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات:

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ :

$$f'(x)=\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{x^2+1}-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\succ 0$$

أي نستنتج ان الدالة $f$ متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

حساب النهايات: $D_f=IR=\left]-\infty;+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1+\frac{-\infty}{+\infty}=\frac{-\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم التعيين.

إزالة حالة عدم التعيين:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)=1-\sqrt{1}=1-1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)=1+1=2$$

جدول التغيرات:

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | 2 |

2) اثبات ان النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $(\gamma)$ :

$A$ نطقة انعطاف للمنحني $(\gamma)$ معناه ان الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ تنعدم عند فاصلة هذه النطقة وتغير اشارتها

لنا $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\times\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ ومنه

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}\right)'=\frac{-3\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}=\frac{-3\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-3x}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x^2+1}}$$

من خلال عبارة الدالة المشتقة نلاحظ ان مقامها موجب تماما وبالتالي فان اشارتها من نفس إشارة البسط أي من نفس إشارة $-3x$ : إشارة $f''(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x$ | | + | 0 | - | |
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | |

من خلال جدول إشارة $f''(x)$ يتضح لنا انها فعلا تنعدم عند 0 وتغير اشارتها أي ان النقطة $A(0;f(0))$ أي $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $(\gamma)$ .

3) كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة $A(0;1)$ : وهي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y=x+1$ .

4) دراسة وضعية $(\gamma)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ ولدراسة ذلك ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ :

$$f(x)-y=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(x+1)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x$$

$$=\frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x-x\sqrt{x^2+1}\right).$$

واشارة الفرق هي من إشارة العبارة $x-x\sqrt{x^2+1}$ :

$$x-x\sqrt{x^2+1}=x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)=x\left(\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=x\left(\frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)=x\left(\frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)=\left(\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)(-x)$$

ونستنتج ان إشارة العبارة المعطاة هي من إشارة $-x$ ومنه فان إشارة الفرق $f(x)-y$ هي من إشارة $-x$ وعليه تكون الوضعية المبينة في الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $-x$ | | + | 0 | - | |
| إشارة الفرق $f(x)-y$ | | + | 0 | - | |
| الوضعية | | $(\gamma)$ فوق $(\Delta)$ | يقطعه | $(\gamma)$ تحت $(\Delta)$ | |

5) $h$ الدالة المعرفة بـ: $h(x)=f(x)-x$

أ) تبيين انه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ وحيد ينتمي الى المجال $[1;2]$ بحيث $h(\alpha)=0$

لنا الدالة $f$ مستمرة على IR وبالتالي فهي مستمرة على $[1;2]$ وأيضا الدالة $x\to -x$ مستمرة على هذا المجال وعليه فان الدالة $h$ مستمرة على هذا المجال لانها مجموع دالتين مستمرتين وبالتالي فحسب مبرهنة القيم

المتوسطة فانه اذا كان $h(1)\times h(2)\prec 0$ فانه يوجد على الاقل عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $[1;2]$ يحقق $h(\alpha)=0$

و $h(1)=f(1)-1=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\succ 0$

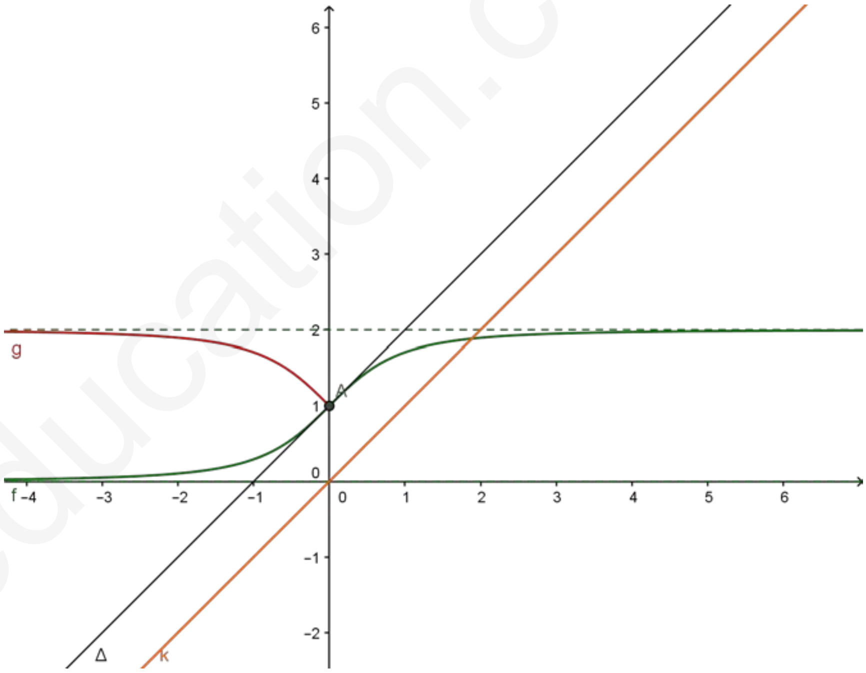
$$h(2)=f(2)-2=1+\frac{2}{\sqrt{5}}-2=\frac{2}{\sqrt{5}}-1=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)}\prec 0$$

ومنه نستنتج انه فعلا $h(1)\times h(2)\prec 0$ ومنه فانه يوجد على الاقل عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $[1;2]$ يحقق $.h(\alpha)=0$

وحدانية $\alpha$ : من جدول التغيرات نلاحظ ان الدالة $f$ رتيبة تماما على المجال $[1;2]$ والدالة $x\to -x$ أيضا رتيبة على هذا المجال و نحن نعلم ان مجموع دالتين رتيبتين على مجال هو دالة رتيبة على هذا المجال اذن العدد $\alpha$ وحيد.

ب) استنتاج عدد نقاط تقاطع المنحني $(\gamma)$ مع المنصف الأول : ان عدد نقاط تقاطع $(\gamma)$ مع المنصف الأول هو عدد حلول المعادلة $f(x)-x=0$ أي هو عدد حلول المعادلة $h(x)=0$ ولها حل وحيد $\alpha$ اذن هناك نقطة واحدة يتقاطع فيها المنحني $(\gamma)$ مع المنصف الأول وهي $(\alpha; f(\alpha))$ حيث $\alpha\in[1;2]$ .

6) رسم المنحني $(\gamma)$ والمماس $(\Delta)$ :




7) $g(x)=f\left(|x|\right)$ :

الدالة g معرفة على IR اذن مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة لـ 0

$g(-x)=f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)=g(x)$ ومنه الدالة g زوجية.

$g(x)=\begin{cases} f(x): x\geq 0 \\ f(-x): x\prec 0\end{cases}$ ومنه نستنتج ان منحنى الدالة g هو نفسه منحنى الدالة f في المجال الموجب اما في المجال السالب فنحصل عليه بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لان g زوجية

الرسم cg مرفق مع الرسم السابق.