ثانوية: محمد العربي بعرير طولقـة　　　　　　　　　　　السنة الدراسية: 2022/2021

المستوى : ثالثة رياضي　　　اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيــات　　الوقت : 3 سا

التمرين الأول: 8ن

I) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $h(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ وجدول تغيراتها

x	0　　α　　e　　　$+\infty$
$h'(x)$	$+$　$+$　0　$-$
$h(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $1+\dfrac{2}{e}$ ↘ 1

°1) بين أن : $0.7<\alpha<0.8$

°2) استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $g(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

°1) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

°2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها

III) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=g(x)+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

°1) بين أن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

°2) أ/° بين أنه من أجل كل x من المجال $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x)=g'(x)\times h(x)$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب/° استنتج اتجاه تغير الدالة f

جـ/° بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{4}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

°3) أ/° أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)

ب/° أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$

جـ /° ماذا يمكن القول عن المنحنيين (C_g) و (C_f) ؟

°4) أرسم (C_g) و (C_f) في نفس المعلم

التمرين الثاني: 5ن

نعتبر المعادلة التفاضلية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $y'-y=2e^x-1$ ....(1)

أ/° عين العددين الحقيقيين a ، b بحيث تكون الدالة : $U:x\to axe^x+b$ حلا للمعادلة التفاضلية (1)

ب/° نضع : $a=2$ و $b=1$

°1) عين حلول المعادلة التفاضلية : $y'-y=0$ ....(2)

°2) أثبت أن : الدالة V حل للمعادلة التفاضلية (1) اذاوفقط اذاكانت الدالة $V-U$ حلا للمعادلة التفاضلية (2)

°3) أ/° استنتج مجموعة الدوال V حلول المعادلة التفاضلية (1)

ب /°عيّن الدالة f حيث : f حلا للمعادلة التفاضلية (1) و تحقق $f(0)=-1$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: 7ن

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2(x-1)e^{x}+1$

1°) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2°) أ°/ أحسب $f'(x)$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب°/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3°) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين فقط α و β حيث : $0.7<\alpha<0.8$ و $-1.7<\beta<-1.6$

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(C_{\exp})$ ، (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين $\exp:x\to e^{x}$ ، $g:x\to 1-e^{-x}$ على الترتيب

و (T_a) مماسا للمنحني $(C_{\exp})$ عند النقطة A ذات الفاصلة a

و (T_b) مماسا للمنحني (C_g) عند النقطة B ذات الفاصلة b

1°) أكتب معادلة لكل من المماسين (T_a) و (T_b)

2°) أثبت أن المماسيّن (T_a) و (T_b) متطابقان معناه $\begin{cases} b=-a \\ \text{و} \\ 2(a-1)e^{a}+1=0 \end{cases}$

3°) استنتج عدد المماسات المتطابقة للمنحنيين $(C_{\exp})$ و (C_g)

انتهى

بالتوفيق

ثانوية محمد العربي بلزرق طولقة

تصحيح الاختبار الأول ثالثة رياضي 2022/2021

ص

التمرين الأول

I) $h(x) = 1+\frac{2\ln x}{x}$ / $x\in]0,+\infty[$

1) لنبين الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0 ; e]$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,7 ; 0,8]$

$h(0,8) \simeq 0,44$ و $h(0,7) \simeq -0,02$

$h(0,7)\cdot h(0,8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$

2)

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) $g(x) = 1+\frac{\ln x}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C_g)

$y=1$ مستقيم مقارب لـ (C_g)

2) $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$g'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$

معناه $\ln x<1$

معناه $x<e$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,e]$ ومتناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e} \simeq 1,4$	$\searrow$	1

III) $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ / $x\in]0,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+\frac{\ln x}{x}\left[1+\frac{\ln x}{x}\right]\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

$y=1$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

2) أ) $f'(x) = g'(x) + 2\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

$= g'(x) + 2\frac{\ln x}{x}\left(g(x)-1\right)'$

$= g'(x) + \frac{2\ln x}{x}g'(x)$

$= g'(x)\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)$

$= g'(x)\,h(x)$

ب)

x	0		α		e		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha , e]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]0 , \alpha]$ ، $[e , +\infty[$

جـ) $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$= \frac{h(x)+1}{2} + \left[\frac{h(x)-1}{2}\right]^2$

$f(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

x	0		α		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1+e+e^2}{e^2} \simeq 1,5$	$\searrow$	1

3) أ)

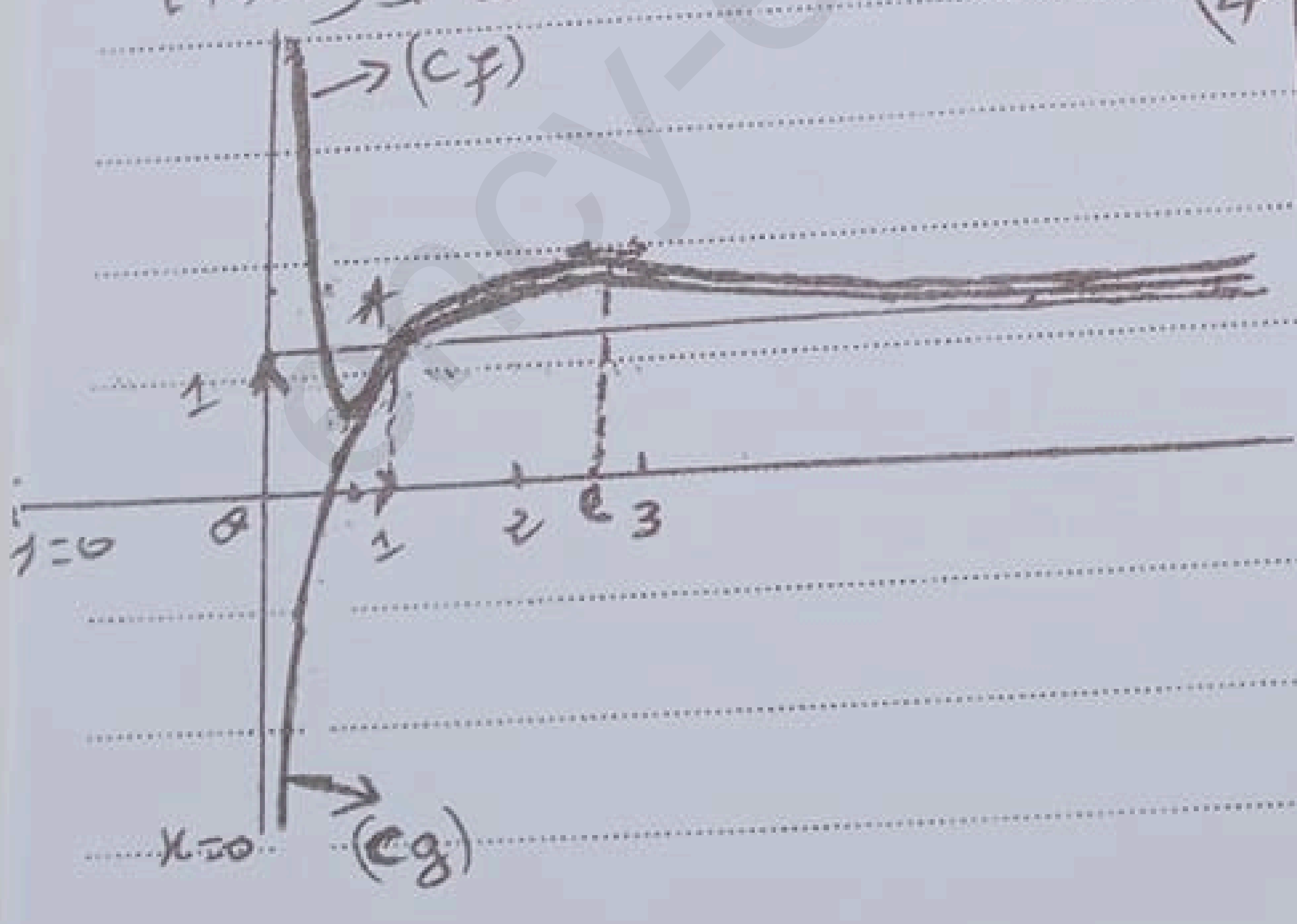
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	‖	$+$	0	$+$	

(C_f) فوق (C_g) ويلامسه في النقطة $A(1,1)$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = 0$

جـ) (C_f) يقارب (C_g) من الأعلى بجوار $(+\infty)$

4)



ص

التمرين الثاني

$y'-y=2e^x-1$ ----> (1)

1) أ) $u(x)=axe^x+b$

الدالة u حلا للمعادلة (1) معناه

من أجل كل x من IR ؛ $u'(x)-u(x)=2e^x-1$

من أجل كل x من IR :

$u'(x)-u(x)=(ax+a)e^x-axe^x-b$
$=ae^x-b$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

$\boxed{u(x)=2xe^x+1}$

ب) 1) $y'-y=0$ ----> (2)

حلول المعادلة (2) هي الدوال المعرفة على IR ب

$x \longrightarrow ce^x \ / \ c\in IR$

2) ① نفرض أن v حلا للمعادلة (1)

$v'(x)-v(x)=2e^x-1 \longrightarrow (I)$

لدينا $u'(x)-u(x)=2e^x-1 \longrightarrow (II)$

نطرح (II) من (I) نجد

$(v-u)'(x)-(v-u)(x)=0$

ومنه v-u حلا للمعادلة (2)

② نفرض v-u حلا للمعادلة (2)

لدينا

$v'(x)-u'(x)-v(x)+u(x)=0$

ومنه $v'(x)-v(x)=u'(x)-u(x)$
$=2e^x-1$

لأن u حلا للمعادلة (1)

3) لدينا v-u حلا للمعادلة (2)

ومنه $v(x)-u(x)=ce^x$ حيث c عدد حقيقي ثابت

ومنه $v(x)=ce^x+2xe^x+1$

ب) $v(0)=-1$ معناه $c+1=-1$

معناه $\boxed{c=-2}$

$f(x)=-2e^x+2xe^x+1$

$\boxed{f(x)=2(x-1)e^x+1}$

التمرين الثالث I)

$f(x)=2(x-1)e^x+1$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(1-\frac{1}{x}\right)xe^x+1=1$

2) أ) $f'(x)=(2x-2+2)e^x$
$=2xe^x$

ب) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,7;0,8]$

$f(0,8)\simeq 0,11$ و $f(0,7)\simeq -0,21$

ومنه $f(0,7)\times f(0,8)<0$

إذن حسب م ق م المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $0,7<\alpha<0,8$

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1,7;-1,6]$

$f(-1,7)\simeq 0,13$ و $f(-1,6)\simeq -0,05$

ومنه $f(-1,7)\times f(-1,6)<0$

إذن حسب م ق م المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β

حيث $-1,7<\beta<-1,6$

II) 1) $(T_a): y=e^a(x-a)+e^a$
$=e^ax+e^a-ae^a$

$(T_b): y=e^{-b}(x-b)+1-e^{-b}$

2) (T_a) منطبق على (T_b) معناه

$\begin{cases} e^{-b}=e^a \\ -be^{-b}-e^{-b}+1=e^a-ae^a \end{cases}$

معناه $\begin{cases} b=-a \\ ae^a-e^a+1=e^a-ae^a \end{cases}$

معناه $\begin{cases} b=-a \\ 2ae^a-2e^a+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} b=-a \\ 2(a-1)e^a+1=0 \end{cases}$

3) حسب الجزء (I) $2(a-1)e^a+1=0$

هي $f(a)=0$ وهي تقبل حلين α و β

ومنه عدد المماسات هو اثنان