ثانوية محند مخبي — مارس 2022
الأقسام: نهائي رياضيات

المدة: 4 ساعات

اختبار الفصل الثاني في مادة :الرياضيات

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية المعادلة ذات المجهول الثنائية (x,y) التالية:

$$2011x-1432y=31.........(1)$$

أ- اثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1)

2) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7 ثم جد باقي القسمة الاقليدية للعدد $1444^{2020^{1954}}$ على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $2022^{2n}+1444^n+1962^n\equiv 5[7]$

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث γ ، β ، α بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متناقصة تماما والثنائية (β,γ) حل لـ (1)

- عين γ ، β ، α ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني:(05 نقاط)

لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-2-\ln x$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- ادرس إتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها

ج- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين a و b حيث $e^{-2}<a<e^{-1}$ و $3<b<4$

د- أنشئ (c_f)

2) بين أن كل المستقيمات الموازية للمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ تقطع (C_f) في نقطة وحيدة

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m^2x$ حلا وحيدا .

4) لتكن النقطتان M و N من المنحنى (C_f) فاصلتاهما على الترتيب x و $\frac{1}{x}$.

أ- عين بدلالة x احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$

ب- استنتج أن النقطة I تنتمي الى مستقيم يوازي (D)

5) لتكن الدالة Φ المعرفة على المجال $[3;4]$ بـ : $\Phi(x)=x-f(x)$

أ- بين أنه من أجل $3\le x\le b$ فان: $\Phi(x)\ge x$ و $3\le\Phi(x)\le b$

ب- أحسب التكامل $I=\int_3^b(\Phi(x)-x)dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج- بين أنه من أجل كل $x\in[3;b]$ فان : $|I|\le(b-3)^2$

التمرين الثالث:(04نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على IN بـ : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

1) بإستعمال البرهان بالتراجع بين أنّه من أجل كل $n \in IN$:

- $u_n \geq n$
- $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

2) لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرفتين على IN^* كالتالي : $v_n = \dfrac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ و $w_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$

أ- بين أن من أجل كل $n \in IN^*$: $w_n - v_n = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+1}}$

ب- إستنتج أنّه من أجل كل $n \in IN^*$: $v_n < w_n$ و $0 < w_n - v_n < \dfrac{1}{n}$

ج- بين أنه من أجل كل $n \in IN^*$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{2n} \times u_{2n+2}}$ ، $v_n = \dfrac{1}{w_n} - 1$

د- إستنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n).

هـ - بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان ، ثم أحسب نهاية كل منهما

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I/ f و دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} & ;x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) أ- بين أن الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا .

ج- بين أنّه من أجل كل $x > 0$: $e^{-x}(x+1) - 1 < 0$

د- استنتج اتجاه تغير الدالة f

2) n عدد طبيعي غير معدوم .

ولتكن الدالة F_n المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $F_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^{-t} dt$

أ- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $F_1(x)$

ب- بين أنّه من اجل كل $n \geq 1$: $F_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $F_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}$ و $F_3(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}$

د- بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $-\dfrac{x}{2} \leq f(x) - 1 \leq -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$

هـ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-1}{x}$ وفسر النتيجة.

/II (u_n) متتالية عددية معرفة على IN بـ : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}dx$

1) أ- أحسب الحد الأول u_0

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} + u_n = f(n)$ ثم أحسب $\lim u_n$.

2) (S_n) متتالية عددية معرفة على $IN^* - \{1\}$ بـ : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k f(k)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x}$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n>1$: $S_n = (-1)^{n-1} u_n + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) - \ln 2$

ج- بين أن (S_n) متقاربة واحسب نهايتها.

/III g دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & ;x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

(C_g) المنحنى البياني للدالة g في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أنه من أجل كل $x \geq 0$: $1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$

ب- بين أن الدالة g مستمرة على يمين $x_0 = 0$

ت- أدرس قابلية اشتقاق الدالة g على يمين $x_0 = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج- بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $0 \leq g(x) \leq \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt$

د- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

4) أ- بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ قابلة للاشتقاق و لدينا : $g'(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$

ب- أدرس أتجاه تغير الدالة g

ج- أنشئ جدول تغيرات الدالة g

د- اكتب معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

هـ- أنشئ كل من (Γ) و (C_g)