الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — ثانوية مالك بن أنس العلمة

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي (التجريبي) — دورة : جوان 2015

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات و نصف

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (04 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

1. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$.
2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$.أستنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

   أ) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الأول v_0 .

   ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$
4. أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (P) المستوي ذو المعادلة $2x+y-2z+4=0$

و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

1. أثبت أن النقط A,B,C تعين مستويا ثم تحقق أن هذا المستوي هو (P). بين أن المثلث ABC قائم.
2. أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O و عمودي على المستوي (P)

   ب) أستنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P).أحسب OH .

   ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.
3. لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و I مركز ثقل المثلث ABC .

   بين أن النقطة G تنتمي الى المستقيم (OI) و أحسب بعد النقطة G عن المستوي (P) .
4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

   أ) حدد طبيعة المجموعة (S) و عناصرها المميزة.

   ب) ما هي طبيعة مجموعة النقط تقاطع (S) و (P) ؟ برّر اجابتك.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

n عدد طبيعي ، نعتبر الأعداد الطبيعية $a_n = 4\times10^n - 1$ ، $b_n = 2\times10^n - 1$ ، $c_n = 2\times10^n + 10$

1. بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و أن b_3 عدد أولي.
2. أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $a_{2n} = b_n \times (c_n - 9)$

   ب) أستنتج تحليلا الى جداء عوامل أولية للعدد a_6
3. أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(b_n;11)$.

   ب) أستنتج أن b_n و c_n أولين فيما بينهما.
4. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) حيث: $b_3x + c_3y = 1$.

   أ) بين أن المعادلة (E) ، تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

   ب) تحقق أن $(-731;727)$ حلا للمعادلة (E) .ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$.

1. أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.
2. عين اتجاه تغير الدالة g .
3. أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم قدم جدول تغيراتها.
2. أثبت أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث :

$$2 < x_1 < \frac{9}{4} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} < x_0 < 1$$

3. أ) حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ، $f(x) = x$.

   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المنصف الأول (Δ) .
4. أوجد النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) للمنحني (C_f) موازيا المنصف الأول (Δ) .
5. أنشئ المماس (T) و المنحني (C_f).
6. ناقش بباستعمال المنحني (C_f)، و حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود حلول المعادلة :

$$(\ln x)^2 - \ln x - m - 2 = 0$$

III. نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$F(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$$

1. أثبت أن F هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$
2. استنتج الدالة الأصلية G للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$. احسب $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{G(x)}{x-1}$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (05 نقاط)

1. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف بـــ: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

أ) أحسب $P(-1)$ ثم بين انه يوجد عددين حقيقيين a و b حيث: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2. المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقها : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$.

أ) عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب) أحسب الأطوال AB ، AC و BC .استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. أ) اكتب $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ على الشكل الأسي .استنتج أن A هي صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب) أوجد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG .

4. أ) بين أن النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$.

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CG}=-4$

5. أنشئ النقطة H ذات اللاحقة $z_H=1+e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون أي حساب.

أحسب $|z_H|$. عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. المستقيم (Δ_θ) هو تقاطع المستويين اللذين معادلتيهما

$$(P'):y-z+(\cos\theta)^2=0 \text{ و } (P):x-y+(\sin\theta)^2=0$$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل عن الأسئلة التالية :

1. المستوي (P) يعامد المستوي (P') .
2. المستوي (P) يشمل النقطة ذات الاحداثيات $(\cos^2\theta;1;3)$.
3. من أجل كل قيمة لــ : θ المستقيم (Δ_θ) محتوى في المستوي الذي معادلته $-x+z+1=0$
4. بعد النقطة O عن المستوي (P') يساوي : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sin^2\theta)$.
5. جملة المعادلات الآتية هي تمثيل وسيطي للمستقيم $\left(\Delta_{\frac{3\pi}{2}}\right)$: $\begin{cases} x=k \\ y=k+1 ; k\in\mathbb{R} \\ z=k+1 \end{cases}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1<u_n<2$.

2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{-1+\sqrt{u_n-1}+u_n}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، $P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=1-xe^{-x}$.

1. احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عين اتجاه تغير الدالة g على المجال $[-1;+\infty[$.

2. أ) اثبت من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;+\infty[$، $g(x)\geq 1-e^{-1}$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{4\ln(-x)}{x} & ;x<-1 \\ f(x)=(x+1)(1+e^{-x}) & ;x\geq -1 \end{cases}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة الطول : 2cm

1. ا) تحقق أن الدالة f مستمرة عند $x_0=-1$.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 .اعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

2. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.أستنتج أن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلة له.

3. أ) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $[-1;+\infty[$.

4. أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=\dfrac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

ب) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$ ثم على المجال $[-1;+\infty[$. قدم جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين أن توجد نقطة وحيدة فاصلتها اكبر من -1 يكون عندها المماس (T) للمنحني (C_f) يوازي المستقيم (Δ)

5. أ) اثبت المنحني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل.

ب) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحني (C_f).

ج) أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=-e$ ، $x=1$ و $y=x+1$.