الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية فتحي سعيد ذراع بن خدة **مديرية التربية لولاية تيزي وزو**

امتحان بكالوريا تجريبي **ماي 2015**

الشعبة : رياضيات و تقني رياضي

اختبار في مادة :الرياضيات المدة : **4سا و30د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05ن)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم $2^{2n}-1$
2) ليكن x عدد صحيح ، إذا كان x حل للمعادلة : $x^2+x\equiv 0[6]$ فإن : $x\equiv 0[3]$
3) مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $12x-5y=3$ هي الثنائيات $(4+10k;9+24k)$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$
4) توجد ثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $a<b$ و $ppcm(a;b)-pgcd(a;b)=1$
5) ليكن M و N عددان مكتوبان في النظام العشري $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب. إذا كان M مضاعف لـ 27 فإن : M-N مضاعف لـ 27
6) في المستوي المركب مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $Z=re^{i\frac{\pi}{3}}$ حيث $r\in\mathbb{R}$ هي دائرة

التمرين الثاني : (05ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$

I. 1) بين أن المثلث ABC قائم .

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته x+y+z-3=0

- بين أن (P) عمودي على (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن(P') المستوي العمودي على (AC) و الذي يشمل A ، أكتب المعادلة الديكارتية لـ (P').

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II. لتكن D نقطة ذات الإحداثيات D (0 ;4 ;-1).

1) بين أن (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC .

3) بين أن قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان .

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC .

ب) استنتج المسافة بين A و المستوي (BDC) .

التمرين الثالث:(5 ن)

المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (تؤخذ وحدة الرسم 1cm)، نعتبر النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ذات اللواحق على الترتيب $Z_0=5-4i$ ، $Z_1=-1-4i$ و $Z_2=-4-i$

1) أ) برّر أنه يوجد تشابه مباشر S حيث: $S(A_0)=A_1$ و $S(A_1)=A_2$

ب) بين أن الكتابة المركبة للتشابه S هي: $Z' = \frac{1-i}{2}Z + \frac{-3+i}{2}$

ج) استنتج النسبة الزاوية و اللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S

د) نعتبر M و 'M نقطتين من المستوي لاحقتيهما Z و 'Z حيث: $Z\neq\omega$ و $S(M)=M'$

- تحقق من العلاقة $\omega-Z'=i(Z-Z')$

- استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف النقطة A_{n+1} بـ $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $U_n=A_n A_{n+1}$

أ) مثل النقط A_0 ، A_1 و A_2 و أنشئ هندسيا النقط A_4 ، A_5 ، A_6

ب) برهن أن المتتالية (U_n) هندسية

3) المتتالية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=U_0+U_1+........+U_n$

أ) عبر عن V_n بدلالة n

ب) هل المتتالية (V_n) متقاربة؟

4) أ) احسب بدلالة n نصف القطر r_n للدائرة المحيطة بالمثلث $\Omega A_n A_{n+1}$

ب) عين أصغر عدد طبيعي P حيث من أجل كل عدد طبيعي n : اذا كان $n > P$ فإن $r_n < 10^{-2}$

التمرين الرابع: (5 ن)

1) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = x^2e^{1-x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$

أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C) ؟

ب) برر أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم احسب دالتها المشتقة f'

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C)

2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم و لنعتبر التكامل I_n المعرف كما يلي : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$

أ) عين علاقة بين I_{n+1} و I_n

ب) احسب I_1 ثم I_2

ج) فسر هندسيا العدد I_2 ثم وضحه على الشكل في السؤال 1)ج)

3) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال [0; 1] و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :
$x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$

ب) استنتج حصرا لـ I_n ثم نهاية I_n لما يؤول n الى $+\infty$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(5ن)

ليكن $OABC$ رباعي وجوه (المثلثات OAB ، OBC ، OCA قائمة في O)

نسمي H المسقط العمودي لـ O على المستوى (ABC)

1) أ) أذكر لماذا المستقيم (OH) يعامد المستقيم (BC)؟

لماذا المستقيم (OA) عمودي على المستقيم (BC)؟

ب)بين أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين (بطريقة مماثلة نبين ان المستقيمين (AC) و (BH) متعامدان) النتيجة تقبل.

ج)ماذا تمثل النقطة H بالنسبة الى المثلث (ABC)؟

2) الفضاء منسوب الى معلم متعامد $(\vec{o};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;3)$

أ) عين معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من 0 و يعامد المستوى(ABC).

ج) بين أن المستوى(ABC) و المستقيم (D) يتقاطعان عند النقطة$H(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49})$

3) أ) أحسب المسافة بين 0 و المستوى(ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ مستنتجا مساحة المثلث ABC

ج) تحقق أن مربع مساحة المثلث ABC تساوي الى مجموع مربعات مساحات الأوجه الأخرى للرباعي الوجوه.

التمرين الثاني(6ن)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1} + 1$

1) بين أن نهاية g عند $+\infty$ تساوي 1

2) بين أن $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أتجاه تغير الدالةg على$]0,+\infty[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على$]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة علىIR كمايلي

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 & ; \quad x > 0 \\ f(x) = (1-x)e^x & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

، ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(\vec{o};\vec{i};\vec{j})$

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ثم إستنتج نهاية f عند$+\infty$ (يمكن وضع $x = \frac{1}{t}$)

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا

3) بين أن f مستمرة عند 0

4) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 و فسر النتيجة هندسيا

5) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

6) بين أن النقطة A ذات الفاصلة -1 نقطة إنعطاف للمنحنى(C)

7) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C)

8) أنشئ المنحنى (C) تعطى القيم

$\ln 2 \approx 0,7$ ، $\ln 3 \approx 1,1$ ، $e^{-1} \approx 0,37$ ، $e^{-2} \approx 0,14$ ، $e^{-3} \approx 0,05$

التمرين الثالث:(3ن)

1) حل المعادلة التفاضلية $\acute{y} = (\ln 2)y$ ....

2) نسمي f الحل الخاص للمعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$

عين عبارة $f(x)$

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

ب)إستنتج باقي القسم الإقليدية على 7 للعدد $f(1433) - 4$.

4) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

التمرين الرابع :(6ن)

ستوى المركب موجه منسوب الى معلم متعامد $(\vec{o};\vec{i};\vec{j})$

I) نريد إيجاد الأعداد المركبة u التي تحقق :$u^2 = 21 - 20i$

1) ليكن u هذا الحل

أثبت أن u هو حل للمعادلة ذات المجهول المركب Z حيث:

$$(E) .... Z^4 - 42z^2 + 841 = 0$$

2) بكتابة $Z^4 - 42Z^2 + 841 = (Z^2 + 29)^2 - 100z^2$

حل في ℂ المعادلة (E)

3) إستنتج قيم u .

II) نعتبر النقط A , B , C و D التي لواحقها على الترتيب α , e , f و d حيث :

$$d = -5 + 2i \text{ و } f = -3 + i \cdot e = 5 - 2i \cdot \alpha = 2 - i$$

نعتبر التشابه المباشر S الذي يحول A الى B و يحول C الى D لتكن M نقطة لاحقها Z و $\acute{M}$ لاحقها $\acute{Z}$ صورة M بـ S .

1) أكتب $\acute{Z}$ بدلالة Z .

عين العناصر المميزة لـ S

III) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 1$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعيn ، العددان u_{n+1} و u_n أوليان فيما بينهما

3) فسر هندسيا باستعمال التشابه S ، حدود المتتالية (u_n) ؟

4) بين أنه من أجل أجل كل عدد طبيعيn ، $u_n = 2^n - 1$.

5) أ) بين أنه من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومينn و p حيث $n \geq p$

لدينا.. $u_n = u_p(u_{n-p} + 1)$

ب)بين أن من أجل كل $n \geq p$: $PGCD(u_n;u_p) = PGCD(u_p;u_{n-p})$

بالتوفيق في البكالوريا