الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الــــوادي — ثانويات: 19 مارس 1962 - عبد العزيز الشريف
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — متقن ميلودي العروسي
الشعبة: تقني رياضي — (دورة: ماي2015)

اختبار في مادة الرياضيات — المـدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول :(3,5 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$ و $C(0;-1;-4)$. (Δ) المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+3\,;\, t\in\mathbb{R} \\ z=-t+1 \end{cases}$ ، (P) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=\alpha+\beta+3 \\ y=-\alpha+2 \quad ;\alpha\in\mathbb{R}\,,\beta\in\mathbb{R} \\ z=\alpha+2\beta \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ على الجمل التالية مع التعليل:

1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ)
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x+y+z-8=0$
3. المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

التمرين الثاني:(04 نقط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:
$z_A=-2$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_B$.

1. بين أن $|z_A-z_B|^2+|z_A-z_C|^2=|z_B-z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. أثبت ان النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها
3. أ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1
   ب ما طبيعة الرباعي $ABDC$
4. بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة
5. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z $(z\neq-2)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{iz-\sqrt{3}+i}{z+2}$
   أ اثبت أن $\arg(z')=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)+\dfrac{\pi}{2}$
   ب عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

التمرين الثالث (03 نقط)

n عدد طبيعي حيث : $A=5n+4$ و $B=4n+3$

1. احسب $4A-5B$ ثم استنتج أن A و B أوليان فيما بينهما
2. عين قيمة n حتى يكون $PPCM(A;B)=12$
3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $24x-30y=6\cdots\cdots(1)$
   أ عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ الذي يحقق $x_0=y_0$ ثم حل المعادلة (1)

ب عين من بين حلول المعادلة (1) الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق: العدد $x(y+1)$ يكتب في النظام ذو الاساس 3 على الشكل $\overline{121}$

4. عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث : $\begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$

<u>التمرين الرابع</u> (3,5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $u_0 = e^3 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n$

1. احسب u_1 ، u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -1$.

2. أ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

أ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

ب أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $v_n > 2\times 10^{-3}$

4. أ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{u_n}{v_n}$

ب ليكن الجداء P_n حيث $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

بين أن: $\ln(P_n) = \frac{n+1}{2}\left(2\ln 2 + 6 - 3n\right)$ ثم استنتج P_n بدلالة n

<u>التمرين الخامس</u>(06نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathcal{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3. احسب من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

4. أ بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = m$

5. أ بين أنه من كل عدد حقيقي x فان: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

ب بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \ln 4$ و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ هما مستقيمان مقاربان

للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل منهما

6. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)

7. ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$

أ اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن : $A(\lambda) = 2\ln\left(\frac{2e^\lambda}{e^\lambda+1}\right)$

ب عين قيمة العدد λ بحيث يكون $A(\lambda) = 1$.

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول :(3.5 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;1;-4)$ ، $B(-2;2;-1)$ و $C(0;3;-4)$

والمستوي (P) الذي معادلته $x-y+z+1=0$

1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستوي (Q) بحيث الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظميا له ، ثم اكتب معادلة ديكارتية لــ (Q)
2. بين أن (P) و (Q) غير متوازيين و غير متعامدين
3. عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)
4. لتكن $\Omega(1;0;1)$ نقطة من الفضاء
   - أ بين ان النقطة Ω متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)
   - ب عين معادلة سطح الكرة (S) ذو المركز Ω و المماس لــ (P) و (Q)
   - ج عين احداثيات النقطتين D و H نقطتي التماس بين (S) و (P) و بين (S) و (Q) على الترتيب
5. لتكن $E\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ هي المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ) ، احسب المسافة بين Ω و (Δ)

التمرين الثاني :(04 نقط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(z+2)(z^2+z+1)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E ذات اللواحق:

$$z_A=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-2 \quad ، \quad z_D=2(-1+\sqrt{3}i) \quad ، \quad z_E=\overline{z_D}$$

1. اكتب $(-z_A)$ على الشكل الأسي ثم علم النقط A ، B ، C ، D ، E
2. ليكن R التحويل النقطي الذي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث : $\frac{z'+2}{z+2}=-z_A$
   - أ ما طبيعة التحويل R و حدد عناصره المميزة
   - ب لتكن النقطة F حيث : $R(D)=F$ ، بين أن $z_F=1+\sqrt{3}i$
   - ج اكتب العدد $\frac{z_E-z_F}{z_D-z_F}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين (FD) و (EF) متعامدان
3. لتكن G مرجح الجملة $\{(A,|z_A|);(B,|z_B|);(C,|z_C|)\}$
   - أ عين z_G لاحقة G
   - ب عين مجموعة النقط M حيث : $\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{AB}$ لما يمسح λ مجموعة الأعداد الحقيقية
   - ج اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة

التمرين الثالث:(03 نقط)

1. أ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 8^n على 19
   - ب احسب باقي قسمة العدد $103^{2015}+27^{1436}+1$ على 19
2. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $103^{3n^2+3n}+122^{12n+2}+11$ قابلا للقسمة على 19
3. من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=1+8+8^2+\cdots+8^n$
   - أ بين أن u_n عدد طبيعي

ب احسب u_n بدلالة n

ج عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد $7(2^n) - u_n$ على 19

<u>التمرين الرابع:</u>(3.5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}}\sqrt{u_n}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$

2. أ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ب- استنتج أن (u_n) متناقصة تماما

ج هل (u_n) متقاربة ؟ اذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

3. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$

أ برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \cdots + \frac{1}{1+\ln u_n}$

<u>التمرين الخامس:</u>(06 نقط)

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\ln(x+1) + \frac{2x}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1. احسب نهايتي الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

2. أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4. بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$

6. ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = x - 3m$

8. F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$

أ بين ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

ب لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \alpha$

بين أن : $A(\alpha) = 4\left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha+1}\right) cm^2$ ثم اوجد حصرا لـ $A(\alpha)$