الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — **ثانوية مالك بن أنس العلمة**

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي (التجريبي) — **دورة : جوان 2015**

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 04 ساعات و نصف**

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (04 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\dfrac{1}{2u_n+1}$

1. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\dfrac{1}{2}$.
2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$.أستنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{5^n u_n}{2u_n-1}$

   أ) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الأول v_0 .

   ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
4. أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}$.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. (P) المستوي ذو المعادلة $2x+y-2z+4=0$

و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

1. أثبت أن النقط A,B,C تعين مستويا ثم تحقق أن هذا المستوي هو (P). بين أن المثلث ABC قائم.
2. أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O و عمودي على المستوي (P)

   ب) أستنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P).أحسب OH .

   ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.
3. لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و I مركز ثقل المثلث ABC .

   بين أن النقطة G تنتمي الى المستقيم (OI) و أحسب بعد النقطة G عن المستوي (P) .
4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

   أ) حدد طبيعة المجموعة (S) و عناصرها المميزة.

   ب) ما هي طبيعة مجموعة النقط تقاطع (S) و (P) ؟ برّر اجابتك.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

n عدد طبيعي ، نعتبر الأعداد الطبيعية $a_n = 4\times10^n - 1$ ، $b_n = 2\times10^n - 1$ ، $c_n = 2\times10^n + 10$

1. بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و أن b_3 عدد أولي.
2. أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $a_{2n} = b_n \times (c_n - 9)$
   ب) أستنتج تحليلا الى جداء عوامل أولية للعدد a_6
3. أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(b_n;11)$.
   ب) أستنتج أن b_n و c_n أولين فيما بينهما.
4. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) حيث: $b_3x + c_3y = 1$.
   أ) بين أن المعادلة (E) ، تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.
   ب) تحقق أن $(-731;727)$ حلا للمعادلة (E) .ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$.

1. أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$.
2. عين اتجاه تغير الدالة g .
3. أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم قدم جدول تغيراتها.
2. أثبت أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث :
$$\frac{1}{e} < x_0 < 1 \quad \text{و} \quad 2 < x_1 < \frac{9}{4}$$
3. أ) حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ، $f(x) = x$.
   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المنصف الأول (Δ) .
4. أوجد النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) للمنحني (C_f) موازيا المنصف الأول (Δ) .
5. أنشئ المماس (T) و المنحني (C_f).
6. ناقش ،باستعمال المنحني (C_f)، و حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود حلول المعادلة :
$$(\ln x)^2 - \ln x - m - 2 = 0$$

III. نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :
$$F(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$$

1. أثبت أن F هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$
2. استنتج الدالة الأصلية G للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$. احسب $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{G(x)}{x-1}$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (05 نقاط)

1. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف بـ: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

أ) أحسب $P(-1)$ ثم بين انه يوجد عددين حقيقيين a و b حيث: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2. المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقها : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$.

أ) عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(z_B-z_A\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب) أحسب الأطوال AB ، AC و BC .استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. أ) اكتب $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ على الشكل الأسي .استنتج أن A هي صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب) أوجد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG .

4. أ) بين أن النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$.

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $\left(-\overline{MA}+2\overline{MB}+2\overline{MC}\right)\cdot\overline{CG}=-4$

5. أنشئ النقطة H ذات اللاحقة $z_H=1+e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون أي حساب.

أحسب $|z_H|$. عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. المستقيم (Δ_θ) هو تقاطع المستويين اللذين معادلتيهما

$$(P'):y-z+(\cos\theta)^2=0 \quad \text{و} \quad (P):x-y+(\sin\theta)^2=0$$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل عن الأسئلة التالية :

1. المستوي (P) يعامد المستوي (P') .
2. المستوي (P) يشمل النقطة ذات الاحداثيات $\left(\cos^2\theta;1;3\right)$.
3. من أجل كل قيمة لـ : θ المستقيم (Δ_θ) محتوى في المستوي الذي معادلته $-x+z+1=0$
4. بعد النقطة O عن المستوي (P') يساوي : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sin^2\theta\right)$.
5. جملة المعادلات الآتية هي تمثيل وسيطي للمستقيم $\left(\Delta_{\frac{3\pi}{2}}\right)$: $\begin{cases}x=k\\ y=k+1\,;k\in\mathbb{R}\\ z=k+1\end{cases}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1<u_n<2$.

2. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{-1+\sqrt{u_n-1}+u_n}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، $P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\cdots\times(u_n-1)$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=1-xe^{-x}$.

1. احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عين اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2. أ) اثبت من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)\geq 1-e^{-1}$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{4\ln(-x)}{x} & ;x<-1 \\ f(x)=(x+1)(1+e^{-x}) & ;x\geq -1 \end{cases}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة الطول : 2cm

1. ا) تحقق أن الدالة f مستمرة عند $x_0=-1$.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 .اعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

2. أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.أستنتج أن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلة له.

3. أ) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $]-1;+\infty[$.

4. أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=\dfrac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

ب) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$ ثم على المجال $]-1;+\infty[$. قدم جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين أن توجد نقطة وحيدة فاصلتها اكبر من -1 يكون عندها المماس (T) للمنحني (C_f) يوازي المستقيم (Δ)

5. أ) اثبت المنحني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل.

ب) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحني (C_f).

ج) أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=-e$ ، $x=1$ و $y=x+1$.

الموضوع الثاني: ... 4

④ $d(O,P') = \frac{|0-0+\cos\theta|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}} = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{2}} = \frac{(1-\sin^2\theta)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sin^2\theta)$

ومنه ④ صحيح.

⑤ $(\Delta_{\frac{3\pi}{2}}): \begin{cases} x-y+\sin^2\frac{3\pi}{2}=0 \\ y-z+\cos^2\frac{3\pi}{2}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

نضع $x=k$: نجد

$\begin{cases} k-y+1=0 ; y=k+1 \\ z=y \quad ; z=k+1 \end{cases}$

ومنه $(\Delta_{\frac{3\pi}{2}}): \begin{cases} x=k \\ y=k+1 \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k+1 \end{cases}$

إذن ① صحيح

التمرين الثالث:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

① * $P(0)$: $1<u_0<2$

$1<\frac{3}{2}<2$ صحيح

* نفرض أن $P(n)$ صحيح من أجل كل عدد طبيعي n أي $1<u_n<2$ ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $1<u_{n+1}<2$

لدينا: $1<u_n<2$

نضيف (-1): $-1+1<u_n-1<2-1$

$0<u_n-1<1$

$\sqrt{0}<\sqrt{u_n-1}<\sqrt{1}$

$0<\sqrt{u_n-1}<1$

نضيف (1) نجد

$1<1+\sqrt{u_n-1}<2$

أي: $1<u_{n+1}<2$

ومنه $P(n+1)$ صحيح

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيح.

② ب

$u_{n+1}-u_n = 1+\sqrt{u_n-1}-u_n$

$= \frac{[\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)][\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)]}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

$= \frac{u_n-1-(u_n^2-2u_n+1)}{-1+\sqrt{u_n-1}+u_n}$

$= \frac{-u_n^2+3u_n-2}{-1+\sqrt{u_n-1}+u_n}$

$= \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{-1+\sqrt{u_n-1}+u_n}$

ج) اتجاه تغير (u_n):

المقام موجب لأنه: $u_n-1>0$ و $\sqrt{u_n-1}>0$.

لأن $1<u_n<2$ ، $-1+1<u_n-1<2-1$

$0<u_n-1<1$

إشارة البسط: لدينا $u_n-1>0$ ولدينا $1<u_n<2$ ومنه $-1>-u_n>-2$ ، نضيف 2: $2-1>2-u_n>-2+2$

أي $1>2-u_n>0$

ومنه $(2-u_n)>0$ إذن

$u_{n+1}-u_n>0$.

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

د) بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 2 أي $u_n<2$

إذن (u_n) متقاربة ونفرض نهايتها ℓ ولكن النهاية لدينا

$\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$.

ومنه: $\lim u_{n+1} = \lim(1+\sqrt{u_n-1})$

$\ell = 1+\sqrt{\ell-1}$

$\sqrt{\ell-1} = \ell-1$ و $\ell\geq1$.

$\ell-1=(\ell-1)^2$

$\ell-1=\ell^2-2\ell+1$

$\ell^2-3\ell+2=0$ ، $\begin{cases}\ell=1 \\ \ell=2\end{cases}$ أو

بما أن (u_n) متزايدة تماما فإن $\ell=2$.

③ أ) $V_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1)$

$= \ln(1+\sqrt{u_n-1}-1)$

$= \ln\sqrt{u_n-1} = \ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\ln(u_n-1)$

$= \frac{1}{2}V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول V_0 ، حيث

$V_0 = \ln(u_0-1) = \ln(\frac{3}{2}-1) = \ln\frac{1}{2} = -\ln2$

• $V_n = V_0 \cdot q^n$

$= -\ln2 \cdot (\frac{1}{2})^n$

ب) لدينا: $V_n = \ln(u_n-1)$

$u_n-1 = e^{V_n}$

$u_n = 1+e^{-\ln2(\frac{1}{2})^n}$

$u_n = 1+(e^{-\ln2})^{(\frac{1}{2})^n}$

$= 1+(\frac{1}{2})^{(\frac{1}{2})^n}$

لأن $e^{-\ln2} = e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

ج) لدينا: $V_n = \ln(u_n-1)$

أي $e^{V_n} = u_n-1$

$u_n-1 = e^{V_n}$

$u_0-1 = e^{V_0}$

$u_1-1 = e^{V_1}$

$\vdots$

$u_n-1 = e^{V_n}$ بالضرب:

$(u_0-1)(u_1-1)\times\dots\times(u_n-1) = e^{V_0}\times e^{V_1}\times\dots\times e^{V_n}$

$P_n = e^{V_0+V_1+\dots+V_n}$

$= e^{V_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

$= e^{-\ln2\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}}$

$= e^{[2\ln2][(\frac{1}{2})^{n+1}-1]}$

$= e^{(2\ln2)((\frac{1}{2})^{n+1}-1)}$.

$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\dots}$

$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{-2\ln2} = e^{\ln2^{-2}}$

$= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

لأن $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^{n+1}=0$ لأن $\frac{1}{2}<1$

التمرين الرابع:

$g(x) = 1-xe^{-x}$

① لدينا: $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-xe^{-x})$

حساب $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}$

نضع: $-x=y$ ، $x\to+\infty$ فإن $y\to-\infty$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{y\to-\infty} ye^{y} = 0$.

ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

* $g'(x) = -e^{-x}+xe^{-x}$

$= (-1+x)e^{-x}$ ، $e^{-x}>0$

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$1-e^{-1}$	↗	1

② من الجدول نستنتج أنه من أجل كل x من $[-1,+\infty[$

$g(x) \geq 1-e^{-1}$

ج) بما أن $1-\frac{1}{e}>0$ إذن $g(x)>0$

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	

إذن بالتعدي نجد:
$\widehat{HOH'} = \widehat{EOH}$.

و منه $Arg z_H = (\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OH})$
$= \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$.

$|z_H| = |1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}|$
$= |1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{1}{2})|$
$= \sqrt{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \cdots$
$= \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

II (P) شعاع ناظمي لـ (P) $\vec{n}_p \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$
(P') ، $\vec{n}_{p'} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_{p'} = 1(0) + (-1)(1) + 0(-1)$
$= -1$

(1) خطأ لأن $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_{p'} \neq 0$.

(2) صحيح لأن: $\cos^2\theta - 1 + \sin^2\theta =$
$\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 =$
$1 - 1 = 0$.

(3) $(\Delta_\theta): \begin{cases} x - y + \sin^2\theta = 0 \\ y - z + \cos^2\theta = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x = y - \sin^2\theta \\ z = y + \cos^2\theta \end{cases}$

$-x + z + 1 = 0$: بالتعويض
نجد $-y + \sin^2\theta + y + \cos^2\theta + 1$
$= 1 + 1$
$= 2 \neq 0$. إذن (3) خطأ.

وهو مركز الدائرة المحيطة w مركز الدائرة [...]
$z_w = \frac{z_B + z_A}{2}$ ، $z_w = 1$ ، $w(1,0)$

(4) (أ) لدينا $-1 + 2 + 2 \neq 0$

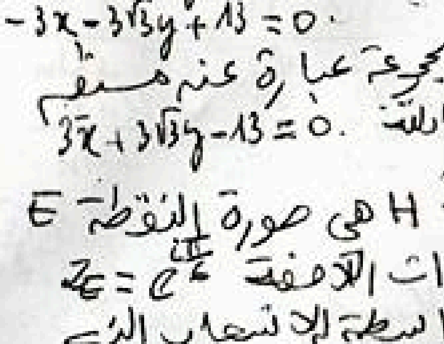
$z_G = \frac{-z_A + 2z_B + 2z_C}{-1+2+2} = 3$.
إذن G هو مرجح الجملة .

(ب) لدينا
$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (-1+2+2)\overrightarrow{MG}$
$= 3\overrightarrow{MG}$

$3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ التعويض نجد
$\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix}3-x\\0-y\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = (3-x)1 + (-y)\sqrt{3}$.
$= 3 - x - \sqrt{3}y$.
بالتعويض في (3) نجد
$3(3 - x - \sqrt{3}y) = -4$
$9 - 3x - 3\sqrt{3}y + 4 = 0$.
$-3x - 3\sqrt{3}y + 13 = 0$.
المجموعة عبارة عن مستقيم معادلته $3x + 3\sqrt{3}y - 13 = 0$.

(5) H هي صورة النقطة E ذات اللاحقة $z_E = e^{i\frac{\pi}{6}}$
بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$.



$EH = 1$ ، $OE = 1$
المثلث OEH متساوي الساقين
و $(OH') \parallel (EH)$ بالتوازي (OH) و (OH')
قاطع لهما نجد
$\widehat{EHO} = \widehat{HOH'}$
و بالتبادل الداخلي
$\widehat{EHO} = \widehat{EOH}$

$z_B - z_A = 2\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$
$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n \cdot e^{i\frac{\pi}{6}n}$
$Arg(z_B - z_A)^n = \frac{\pi}{6}n$
و منه
$\frac{\pi}{6}n = \pi + 2k\pi$
$n = 6 + 12k ;\ k \in \mathbb{N}$

(ج) $AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}|$
$= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$.
$AC = BC = 2\sqrt{3}$.
المثلث ABC متقايس الأضلاع

(3) (أ) $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$
$= \frac{\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}\ \frac{e^{i(\pi - \frac{\pi}{6})}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$
$= \sqrt{3}\ e^{i(\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})}$
$= \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$. $= \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z_A - z_C = \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}(z_G - z_C)$
إذن A صورة G بواسطة التشابه الذي مركزه C
ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(ب) مما سبق لدينا
$Arg\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{\pi}{2}$ ، $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$
و منه المثلث ACG قائم في C . إذن [AG] هو قطر
الدائرة المحيطة بالمثلث ACG
أي نصف القطر هو:
$r = \frac{AG}{2}$ ، $r = \frac{|z_G - z_A|}{2}$ ، $r = 2$

$G(x) = \int_1^x f(t)dt$
$= \int_1^x (t - 2 + (\ln t)^2 - \ln t)\,dt$
$= \left[\frac{t^2}{2} - 2t + t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t - (t\ln t - t)\right]_1^x$
$= \frac{x^2}{2} + x + x(\ln x)^2 - 3x\ln x - \frac{3}{2}$

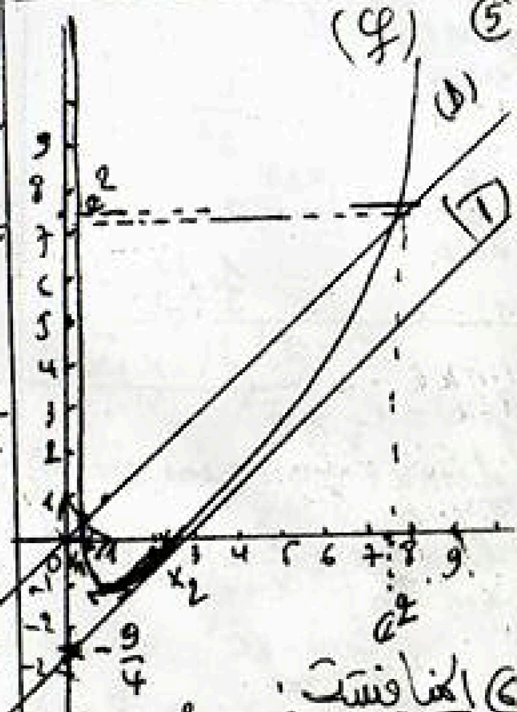
حساب $\lim_{x \to 1} \frac{G(x)}{x-1}$
الدالة G قابلة للاشتقاق عند 1
و لدينا $G(1) = 0$ و منه
$\frac{G(x)}{x-1} = \frac{G(x) - G(1)}{x - 1}$
$\lim_{x \to 1} \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = G'(1)$
$= f(1) = -1$

الموضوع الثاني:

(1) (أ) $P(-1) = 0$.
$P(z) = z^3 + (1+a)z^2 + (a+b)z + b$
$= z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
بالمطابقة نجد: $a = -4$ و $b = 7$
$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$.
(ب) $P(z) = 0$ الحلول هي: $z = -1$ ،
$z = 2 + i\sqrt{3}$ أو $z = 2 - i\sqrt{3}$

(2) (أ) يكفي أن نبين أن:
$Arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$
لدينا:
$z_B - z_A = 3 + i\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

(5) (φ)



(6) المناقشة:
$(\ln x)^2 - \ln x - m - 2 = 0$.
$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = m$
نضيف x :
$x + (\ln x)^2 - \ln x - 2 + x = m + x$
$x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x = x + m$
$f(x) = x + m$.
إذا كان:
$S = \emptyset$ ، $m \in]-\infty, -\frac{9}{4}[$:
$m = -\frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا
$m \in]-\frac{9}{4}, +\infty[$ المعادلة تقبل حلين

II (1) من أجل كل x من $]0, +\infty[$
$F'(x) = (\ln x)^2 + x(2\frac{\ln x}{x}) - 2\ln x$
$- 2x(\frac{1}{x}) + 2$
$= (\ln x)^2$
هي دالة أصلية للدالة
$x \mapsto (\ln x)^2$

(3) ⓟ $f(x)=x$

$x-2+(\ln x)^2-\ln x=0.$

$(\ln x)^2-\ln x-2=0.$

نضع : $\ln x=y$

$y^2-y-2=0$ منه

$y=-1,\ \ln x=-1\ \ x=e^{-1}$

$y=2\ \ln x=2,\ x=e^2$

الحلول هي : $\{e^{-1}, e^2\}$

ⓒ $f(x)-x=(\ln x)^2-\ln x-2.$

x	0		e^{-1}		e^{2}		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(φ) فوق (D)	(φ) يقطع (D) $(e^{-1};e^{-1})$	(φ) تحت (D)	(φ) يقطع (D) $(e^2;e^2)$	(φ) فوق (D)	

ⓓ معامل توجيه المستقيم (D) هو 1

و معامل توجيه المماس هو $f'(x_0)$

لتكن النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ من (φ).

$f'(x_0)=1$

$\frac{x_0-1+2\ln x_0}{x_0}=1$ و $x_0>0$

$-1+2\ln x_0=0,\ x_0=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$

$f(\sqrt{e})=\sqrt{e}-\frac{9}{4}$

$M_0(\sqrt{e}, \sqrt{e}-\frac{9}{4})$

ⓔ إنشاء (T)

$(T): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$

$y=1(x-\sqrt{e})+\sqrt{e}-\frac{9}{4}$

$(T): y=x-\frac{9}{4}$

(4) (I) ① $g(x)=x-2+2\ln x$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0} g(x)=-\infty$

② $g'(x)=1+\frac{2}{x}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	

g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

③ $g(1)=0.$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(II) ① ⓟ $f'(x)=1+2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}.$

$=\frac{x+2\ln x-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$

ⓒ إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	(-1)	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2+\ln x(\ln x-1))$

$=+\infty$

② f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[\frac{1}{e},1]$ و $f(1)\cdot f(\frac{1}{e})<0$

إذنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $f(x_0)=0$ و $\frac{1}{e}<x_0<1$.

وبطريقة مماثلة نثبت أنه $f(x_1)=0$ و $x_1\in]2,\frac{9}{4}[$.

$b_n\equiv1[11]$

وفرضنا أن $b_n\equiv0[11]$

بالطرح نجد $b_n-b_n\equiv1-0[11]$

$0\equiv1[11]$ تناقض

ومنه $b_n\not\equiv0[11]$

بنفس الطريقة إذا كانه n فردي

إذنه 11 لا يقسم b_n ومنه

$PGCD(b_n,11)=1$

أي b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

(4) $(E): b_3x+c_3y=1.$

ⓟ نضع $n=3$ نجد أن :

b_3 و c_3 أوليان فيما بينهما

إذنه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان x و y حيث

$b_3x+c_3y=1$

ومنه (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ⓒ التحقق :

$b_3(-731)+c_3(727)=$

$1999(-731)+2010(727)=1$

$1999x+2010y=1$

$1999(-731)+2010(727)=1$

بالطرح نجد

$1999(x+731)=2010(y-727)$

2010 يقسم $1999(x+731)$

و 2010 أولي مع 1999

حسب غوص فإنه 2010 يقسم $x+731$

أي $x=-731+2010k$

بالتعويض نجد :

$y=727+1999k$

$k\in\mathbb{Z}$

d يقسم $(b_n$ و $c_n)$ فإن

d يقسم (c_n-b_n) أي

d يقسم $(2\times10^n+10-2\times10^n+1)$ أي

d يقسم (11) و d يقسم (b_n)

إذنه d يقسم $(b_n$ و $11)$

$PGCD(b_n,11)=d'$ عكسيا : نضع

ونثبت أن d' يقسم b_n و c_n

d' يقسم $(11$ و $b_n)$ فإن

d' يقسم (b_n+11) أي

d' يقسم $(2\times10^n-1+11)$

أي d' يقسم $(2\times10^n+10)$

d' يقسم (c_n) و d' يقسم (b_n)

فإنه d' يقسم $(b_n$ و $c_n)$ إذنه

ومنه $d=d'$

$PGCD(b_n,c_n)=PGCD(b_n,11)$

ⓒ يكفي إثبات $PGCD(b_n,c_n)=1$

أي إثبات أنه $PGCD(b_n,11)=1$

بما أن 11 أولي يكفي إثبات

أن 11 لا يقسم b_n.

نفرض أن 11 يقسم b_n أي

$b_n\equiv0[11]$

$2\times10^n-1\equiv0[11]$

$2\times10^n\equiv1[11]$ $10\equiv-1[11]$

ومنه $10^n\equiv(-1)^n[11]$

$2\times10^n\equiv2(-1)^n[11]$

نجد حالتين :

n زوجي :

$2\times10^n\equiv2[11]$.

$2\times10^n-1\equiv1[11]$

أي $b_n\equiv1[11]$

ⓒ يكفي إثبات : $a_n\equiv0[3]$ و $c_n\equiv0[3]$.

لدينا : $10\equiv1[3],\ 10^n\equiv1[3]$; $4\equiv1[3]$

$4\times10^n\equiv1[3]$ $4\times10^n-1\equiv1-1[3]$

$4\times10^n-1\equiv0[3],\ a_n\equiv0[3]$

$10^n\equiv1[3]$; $2\equiv2[3]$; $2\times10^n\equiv2[3]$

$10\equiv$ لدينا :

$2\times10^n+10\equiv2+10[3]$

$\equiv12[3]$

$\equiv0[3]$ $c_n\equiv0[3]$

إثبات أن b_3 أولي : $b_3=2\times10^3-1$

$=1999$

نبحث عن الأعداد الأولية التي مربعها أصغر من 1999 هي :

$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43\}$

لا يقبل القسمة أي عدد من هذه الأعداد 1999

إذنه 1999 أولي.

ⓟ $a_{2n}=4\times10^{2n}-1$ ... ط

$b_n\times(c_n-9)=(2\times10^n-1)\times(2\times10^n+10-9)$

$=(2\times10^n-1)(2\times10^n+1)$

$=(2\times10^n)^2-1^2$

$=4\times10^{2n}-1$

منه ط = ط ومنه

$a_{2n}=b_n\times(c_n-9).$

$a_6=a_{2(3)}=b_3\times(c_3-9)$

$=1999\times2001$

$=1999\times3\times23\times29.$

ⓟ نضع : $PGCD(b_n,c_n)=d$

ونثبت أن d يقسم b_n و 11

الموضوع الأول:

① $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$, $u_0=\frac{1}{5}$

1) أ) $P(n): 0<u_n<\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$

$0<u_0<\frac{1}{2}$, $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$: $P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ صحيح من أجل عدد طبيعي كيفي $n \geq 0$

$P(n): 0<u_n<\frac{1}{2}$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

الإثبات: لدينا $0<u_n<1/2$

نضرب في 2: $0<2u_n<1$

نضيف 1: $1<2u_n+1<2$

المقلوب: $\frac{1}{1}>\frac{1}{2u_n+1}>\frac{1}{2}$

نضرب في (-1): $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

نضيف (1): $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

إذن: $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

2) أ) $u_{n+1}-u_n=1-\frac{1}{2u_n+1}-u_n$

$=\frac{2u_n+1-1-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}$

$=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}$

$=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

$u_n>0$ لأن $2u_n+1>0$

ندرس إشارة $(1-2u_n)$

لدينا $0<u_n<\frac{1}{2}$ ، $-2(0)>-2u_n>-1$

نضيف 1: $1>1-2u_n>0$

إذن $1-2u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب) بما أن u_n محدودة من الأعلى ب $\frac{1}{2}$ ومتزايدة تماما على $\mathbb{N}$ إذن (u_n) متقاربة.

حساب النهاية: نضع:

$\lim u_n = l = \lim u_{n+1}$

$\lim u_{n+1}=\lim\left(1-\frac{1}{2u_n+1}\right)$

$l=1-\frac{1}{2l+1}$

$2l^2+l=2l+1-1$.

$l(2l-1)=0$, $l=0$ or $l=\frac{1}{2}$

بما أن (u_n) متزايدة تماما فإن $l=\frac{1}{2}$

③ $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

$v_{n+1}=\frac{5^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$=\frac{5^n\cdot5\left(1-\frac{1}{2u_n+1}\right)}{2\left(1-\frac{1}{2u_n+1}\right)+1}$

$=2\times5\,5^n\,\frac{u_n}{2u_n-1}$

$=10\,v_n$

ومنه (v_n) م.هـ أساسها 10 وحدها الأول v_0 حيث:

$v_0=\frac{5\cdot u_0}{2u_0-1}$, $v_0=-\frac{1}{3}$.

ب) $v_n=v_0q^n$, $v_n=-\frac{1}{3}10^n$

لدينا: $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

$2v_nu_n-v_n=5^n\cdot u_n$

$u_n=\frac{v_n}{2v_n-5^n}$, $u_n=\frac{-\frac{10^n}{3}}{2\left(-\frac{10^n}{3}\right)-5^n}$

$u_n=\frac{10^n}{2\times10^n+3\times5^n}=\frac{(5\times2)^n}{5^n(2\times2^n+3)}$

$u_n=\frac{5^n\times2^n}{5^n(2^{n+1}+3)}$, $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\lim u_n=\lim\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\frac{1}{2}$.

$\lim u_n=\frac{1}{2}$.

④ $\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}+\frac{3}{2^n}$, $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\frac{1}{u_n}=2+3\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$\frac{1}{u_0}=2+3\left(\frac{1}{2^0}\right)$

$\frac{1}{u_1}=2+3\left(\frac{1}{2}\right)$ بالجمع

$\vdots$

$\frac{1}{u_n}=2+3\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$S_n=2(n+1)+3\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)$: أي

$\frac{1}{2^0}=1$ حدود م.هـ حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

$S_n=2(n+1)+3\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$

$S_n=2n+8-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

II ② 1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{AB}=k\vec{AC}$ إذن النقط A ، B و C ليست في استقامية

ولدينا:

$A\in(P): 2(3)+2-2(6)+4=0$.

$B\in(P): 2(1)+2-2(4)+4=0$.

$C\in(P): 2(4)-2-2(5)+4=0$.

إذن المستوي هو (P).

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-2(1)+0(-4)+(-2)(-1)$

$=0$

إذن المثلث ABC قائم في A.

② (D) ⊥ (P) ناظمي لـ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

$O\in(D)$:

$\vec{OM}\parallel\vec{u}$, $\vec{OM}=t\vec{u}$

$(D):\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

ب) $\begin{cases}OH\perp(P)\\H\in(D)\\H\in(P)\end{cases}$ $H(x,y,z)=$ $H(2t,t,-2t)$

$H\in(P): 2(2t)+t-2(-2t)+4=0$

$t=-\frac{4}{9}$, $H\left(-\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$

$OH=\sqrt{\left(-\frac{8}{9}-0\right)^2+\left(-\frac{4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{8}{9}-0\right)^2}$

$OH=\frac{4}{3}$

ج) حجم رباعي الوجوه = $\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$

أي: $V=\frac{1}{3}OH\cdot S_{ABC}$

S_{ABC} مساحة المثلث ABC

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{AB\cdot AC}{2}$. u.v

$V=\frac{4}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}}{2}$. u.v

$V=\frac{8}{3}$. u.v

③ $\vec{GO}+\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

I م ثقل المثلث ABC :

$\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$

$(\vec{GI}+\vec{IO})+(\vec{GI}+\vec{IA})+(\vec{GI}+\vec{IB})$
$+(\vec{GI}+\vec{IC})=\vec{0}$.

$\vec{GI}+3\vec{IO}+\underbrace{\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}}_{\vec{0}}=\vec{0}$.

$\vec{GI}=3\vec{OI}$.

$\vec{GI}=\frac{1}{3}\vec{OI}$

ومنه G ، O ، I في استقامية

$G\in(OI)$: إذن

$d(G,P)=\frac{|2x_G+y_G-2z_G+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$

$I=\frac{3(0)+4(3)+1(1)+4}{3+1+1+1}=\frac{4}{3}$.

$I=\frac{3(0)+2+2-2}{6}=\frac{1}{3}$

$I=\frac{3(0)+6+4+5}{6}=\frac{5}{2}$.

$d(G,P)=\frac{2}{3}$.

④ أ) $\vec{MO}+\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=6\vec{MG}$

$6\|\vec{MG}\|=6$, $MG=1$

(S) عبارة عن سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1

ب) $d(G,P)=\frac{2}{3}<1$

(S) تقطع (P) في دائرة