الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **ثانوية عبد اللافي/عين تاغروت**

بكالوريا تجريبي

الشعبة : تقني رياضي — **ماي 2015**

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات ونصف

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط):

I) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المتتالية (Un) حيث: $\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n} \end{cases}$

1. أحسب U_2 و U_3
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $U_n \succ \frac{1}{e}$
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \prec 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية (Un)

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: n $\quad V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln U_n$

1. أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول
2. عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج أن: $U_n = e^{6(\frac{1}{2})^n - 1}$
3. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
4. أحسب الجداء $P_n = U_1 \times U_2 \times .....\times U_n$

التمرين الثاني(4 نقاط):

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط A , B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3+5i$ و $z_B = -4+2i$ و $z_C = 1+4i$

ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z

النقطة $M^/$ ذات اللاحقة $z^/$ حيث : $z' = (2-2i)z + 1$

1. عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S
2. أ) عين $z_{B^/}$ لاحقة النقطة $B^/$ صورة النقطة B بالتحويل S

   ب) بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان
3. لتكن M النقطة ذات اللاحقة $z = x+iy$ حيث x و y عددان صحيحان

   بين ان الشعاعين $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان اذا و فقط اذا كان : $x+3y=2$
4. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $x+3y=2$

   أ) بين أن الثنائية $(-4,2)$ حل خاص للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب) استنتج مجموعة النقط M التي احداثياها تنتمي الى المجال $[-5,5]$ وتجعل الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان

التمرين الثالث(4 نقاط):

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط $A(2,1,3)$ و $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$

1. بين أن النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة

2. ليكن (D) المستقيم ذو التمثيل الوسيطي التالي $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC)

ب) عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوي (ABC)

أ) بين أن النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

عين طبيعة المجموعة (E) و حدد عناصرها المميزة

ج) لتكن (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

عين طبيعة المجموعة (F) و حدد عناصرها المميزة

د) عين المجموعة $(E)\cap(F)$ و هل النقطة $S(-8,1,3)$ تنتمي الى المجموعة $(E)\cap(F)$

التمرين الرابع(8 نقاط):

f دالة عددية معرفة على $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ كمايلي : $f(x)=\ \ln(2x+1)\ \text{-}\ x$

(C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $4cm$)

<u>الجزء الأول</u> :

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم β ينتمي إلى $[1;2]$ يحقق $\ln(2\beta+1)=\beta$

4) اكتب معادلة للمماس للمنحنى (C) عند النقطة O مبدأ المعلم.

5) أنشئ المماس عند O و المنحنى (C)

<u>الجزء الثاني :</u>

1) عين العدد الحقيقي b علما أن الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=(x+b)\ \ln(2x+1)\ \text{-}\ x$

دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(2x+1)$ على المجال $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2) احسب بدلالة β المساحة S للحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحور الفواصل .

3) تحقق أن $S=\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ ثم بين أن $0\prec S\prec\frac{3}{8}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4 نقاط):

I) 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على

2) استنتج باقي قسمة العدد A على 10 حيث: $A = 63\times 9^{2011} - 7^{1432}$

3) برهن أنه من أجل عدد طبيعي n فإن: $3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$

4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

II) 1) احسب: $PGCD(225;180)$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $225x - 180y = 90$

3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = \overline{52}^{\alpha} = \overline{44}^{\beta}$ ، $b = \overline{252}^{\alpha} = \overline{206}^{\beta}$.

عين: α، β ثم a و b

التمرين الثاني (4 نقاط):

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$$

1) بين أن العدد i حل للمعادلة $P(z)=0$

2) جد الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث لكل عدد مركب z يكون : $P(z) = (z-i)(az^2+bz+c)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = 2+3i$ و $z_C = 2-3i$

1) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$

عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R

2) بين أن النقط C,B,A' على استقامة واحدة

3) عين الكتابة المركبة للتحاكي H الذي مركزه B و يحول A' الى C

التمرين الثالث (8 نقاط):

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f واستنتج إشارة $f(x)$

2) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = e^{-x}\ln(e^x+1)$. (C_g) التمثيل البياني الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$).

أ/ بين أنه من أجل كل x حقيقي فإن: $g'(x) = e^{-x}f(x)$.

ب/ ادرس تغيرات الدالة g

جـ/ ارسم (C_g)

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $h(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

أ/ تحقق أن: $h'(x)=-\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

ب/ احسب بالسنتيمتر المربع المساحة $A(\lambda)$ الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g)، محور الفواصل، المستقيمان اللذان معادلتاهما: $x=0$; $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.(يمكنك استعمال التكامل بالتجزئة)

ج/ احسب: $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين الرابع (4 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

اختر من بين الإقتراحات الموضوعة الأجوبة الصحيحة لكل عبارة مع التعليل :

1) (P) المستوي ذو المعادلة $2x+3y+4z=0$:

أ) المسافة بين O و (P) تساوي $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ ب) الشعاع $\vec{n}\left(1;\dfrac{3}{2};2\right)$ ناظمي للمستوي (P)

ج) المسافة بين O و (P) تساوي 1 د) المستوي (Q) ذو المعادلة $-5x+2y+z=0$ يوازي (P)

2) (P) المستوي ذو المعادلة : $2x+y-z=0$ و (D) المستقيم المار من النقطة $A(1,1,1)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1,-4,-2)$:

أ) (D) يوازي (P) ب) (D) يعامد (P)

ج) (D) يقطع (P) د) (D) له تمثيل وسيطي $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=1-2t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

3) (S) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

أ) (S) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

ب) (S) هي سطح كرة قطرها $[AB]$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(-1,1,3)$

ج) (S) مماسة للمستوي (OCD) في النقطة C حيث $C(0,-1,1)$ و $D(1,-1,0)$

د) (S) مجموعة خالية

4) النقط $A(0,0,-1)$ و $B(-1,1,2)$ و $C(1,1,-4)$:

أ) تعين المستوي (ABC) ب) A,B,C في استقامية

ج) النقطة $G\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{5};\dfrac{-11}{5}\right)$ هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,3)\}$

د) المستقيم (AD) له تمثيل وسيطي $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

مع تمنياتنا بالنجاح في شهادة البكالوريا 2015

الاستاذ: عروة.ب

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبية
في مادة الرياضيات

الشعبة: تقني رياضي (هندسة كهربائية).

الموضوع الأول.

التنقيط	الإجابة النموذجية
	التمرين الأول:
0,25x2	I) 1) $u_2=\sqrt{e}$ ؛ $u_3=e^{-\frac{1}{4}}$
0,5	2) إثبات أن: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n>\frac{1}{e}$ نبرهن بالتراجع: من أجل $n=1$ لدينا: $u_1=e^2$ و $e^2>\frac{1}{e}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$. نفرض أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ ونبرهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}>\frac{1}{e}$: لدينا من فرضية التراجع: $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$ أي: $\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}$ ومنه: $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$ أي: $u_{n+1}>e^{-1}$ أي: $u_{n+1}>\frac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.
0,5	3) البرهان أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{u_n}$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$ من السؤال ② لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$ ومنه: $\frac{1}{\sqrt{u_n}}<\sqrt{e}$ وبالتالي: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{e}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n}<e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.
0,25	استنتاج تقارب (u_n): من السؤال ② لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ أي (u_n) محدودة من الأسفل. من السؤال ③ لدينا: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ أي $u_{n+1}<u_n$ ومنه (u_n) متناقصة تماما نستنتج حسب المبرهنة أن (u_n) متتالية متقاربة.
0,75	II) 1) إثبات أن (v_n) هندسية: (v_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $v_{n+1}=q\times v_n$. لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_{n+1}$ $v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{u_n}{e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln u_n-\frac{1}{4}$ أي: $v_{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln u_n=\frac{1}{2}v_n$

و منه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1=\frac{3}{2}$

0,25 — 2) عبارة V_n :

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $V_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

0,5 — استنتاج U_n : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $V_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_n$

و منه : $U_n=e^{2V_n-1}$ أي ، $U_n=e^{2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}-1$.

أي : $U_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

0,25 — 3) حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

0,5 — 4) حساب الجداء P_n :

أي $P_n=U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$ ؛ $P_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)-1}\times e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}\times\ldots\times e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

و منه : $P_n=e^{6\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$ و منه : $P_n=e^{6\left[\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]-n}$.

و بالتالي : $P_n=e^{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$.

التمرين الثاني :

0,5 — 1) طبيعة S وعناصرها المميزة :

S من الشكل : $z'=az+b$ حيث $a=2-2i$ و $b=1$

لدينا : $|a|=2\sqrt{2}$ ، $\arg a=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، $\frac{b}{1-a}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

ومنه S هو تشابه مباشر مركزه $\Omega\left(-\frac{1}{5};-\frac{2}{5}\right)$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2}$

0,25 — 2) أ) تعيين $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحويل S :

أي : $z'_B=az_B+b$ ؛ $z_{B'}=-3+12i$.

0,5 — ب) (CB') و (CA) متعامدان لأن : $\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}=4i$ و $\arg\left(\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

0,75 — 3) لدينا : $M'(2x+2y\,;\,2y-2x-4)$ ومنه $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2x+2y\\2y-2x\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CM'}$ متعامدان يكافئ $\overrightarrow{CM'}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ أي : $x+3y=2$

1 — 4) أ) الثنائية $(-4,2)$ حل خاص للمعادلة (E) لأن $-4+3\times2=2$.

لدينا : $x+3y=2$ و $-4+3\times2=2$ ومنه $x+3y=-4+3\times2$ أي $x+4=3(2-y)$

3 يقسم $3(2-y)$ أي 3 يقسم $x+4$ ومنه : $x=3k-4$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد : $y=2-k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{(3k-4\,;\,2-k),\,k\in\mathbb{Z}\}$

1 — ب) تعيين مجموعة النقط M التي احداثياتها تنتمي إلى $[-5,5]$:

لدينا $-5\leq x\leq 5$ و $-5\leq y\leq 5$ ومنه ، $-5\leq 3k-4\leq 5$ و $-5\leq 2-k\leq 5$

نجد : $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه مجموعة النقط M هي :

$\{(-4,2)\,;\,(-1,1)\,;\,(2,0)\,;\,(5,-1)\}$

التمرين الثالث :

1) النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا 0,5

2) أ) المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لأن شعاع توجيهه $\vec{u}(2,-3,1)$ 0,5

عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0 \quad \text{و} \quad \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}=0.$$

ب) معادلة المستوي (ABC) : 0,5

بما أن (D) عموديا على المستوي (ABC) فإن شعاع توجيه (D) هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) الذي يشمل النقطة A ومنه معادلة المستوي (ABC) هي :

$$2x-3y+z-4=0.$$

3) أ) H مرجح الجملة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$ ومنه $H(-5,-3,5)$ 0,5

وتقاطع (D) مع (ABC) هي حل الجملة

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$$

لحل الجملة نجد النقطة H (نجد $t=1$ وبالتعويض نجد احداثيات H).

ب) تعيين المجموعة (E) : 0,75

$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ يكافئ : $-\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ يكافئ $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

ومنه (E) هي المستوي المار من النقطة H والعمودي على المستقيم (CB).

ج) تعيين المجموعة (F) : 0,75

$\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$ يكافئ : $MH=\sqrt{29}$

ومنه (F) هي سطح الكرة التي مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

د) تعيين $(E)\cap(F)$: 0,25

$(E)\cap(F)$ هي دائرة مركزها النقطة H لأن H تنتمي إلى (E) وإلى (F) ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

هـ) هل $S(-8,1,3)$ تنتمي إلى $(E)\cap(F)$: 0,25

$S\in(E)\cap(F)$ إذا وفقط إذا كانت المسافة بين النقطة S ومركز الدائرة H تساوي نصف القطر أي $\sqrt{29}$.

لدينا : $SH=\sqrt{(-5+8)^2+(-3-1)^2+(5-3)^2}$ أي $SH=\sqrt{3^2+4^2+2^2}$ ومنه : $SH=\sqrt{29}$

إذن $S\in(E)\cap(F)$.

التمرين الرابع :

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث :

$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x \cdot e^x}{(e^x+3)^2}$ أي : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=0$ يكافئ $e^x-3=0$

أي : $x = \ln 3$.

ومنه $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{\ln 3\}$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جـ)

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\ln 3$	↗ $+\infty$

د) $f'(x)$ ينعدم عند $x=\ln 3$ ولا يغير إشارته ومنه النقطة $(\ln 3, \ln 3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

(يمكن حساب المشتقة الثانية للدالة f نجد : $f''(x) = 12e^x \frac{(e^x-3)}{(e^x-3)^3}$ والتي تنعدم عند $x=\ln 3$ وتغير إشارتها) .

هـ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $f[(\ln 9 - x)] + f(x) = \ln 9 - x - \frac{4e^{\ln 9 - x}}{e^{\ln 9 - x}+3} + x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} = 2\ln 3$.

ومنه النقطة $(\ln 3, \ln 3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) .

2) أ) المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ لأن

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4e^x}{e^x+3} = 0$.

ولدينا من أجل x من $\mathbb{R}$: $\frac{-4e^x}{e^x+3} < 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقع تحت (D) .

ب) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{e^x+3} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x-2$

مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{12}{e^x+3} > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) .

جـ) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1{,}8;-1{,}7[$ و $f(-1{,}8) \times f(-1{,}7) < 0$

لأن : $f(-1{,}8) \simeq -0{,}002$ و $f(-1{,}7) = 0{,}008$ ومنه حسب نظرية

القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1{,}8;-1{,}7[$

حيث $f(\alpha) = 0$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $(\alpha, f(\alpha))$

د) انشاء (C_f)

3) أ) $A(\alpha) = \int_\alpha^0 [-f(x)]\,dx$ نجد بعد الحساب $A(\alpha) = 4[\ln 4 - \ln(e^\alpha+3)]$

ب) نبين أن : $A(\alpha) = 4[\ln(\alpha+2) - 2]$:

لدينا $f(\alpha)=0$ ومنه: $\alpha+2=\frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}$ أي: $e^{\alpha}+3=\frac{4e^{\alpha}}{\alpha+2}$.

ولدينا $A(\alpha)=4\left[\ln4-\ln(e^{\alpha}+3)\right]$ ومنه: $A(\alpha)=4\left[\ln4-\ln\left(\frac{4e^{\alpha}}{\alpha+2}\right)\right]$.

أي: $A(\alpha)=4\left[\ln4-\ln4e^{\alpha}+\ln(\alpha+2)\right]=4\left[\ln4-\ln4-\ln e^{\alpha}+\ln(\alpha+2)\right]$

وبالتالي: $A(\alpha)=4\left[\ln(\alpha+2)-\alpha\right]$.

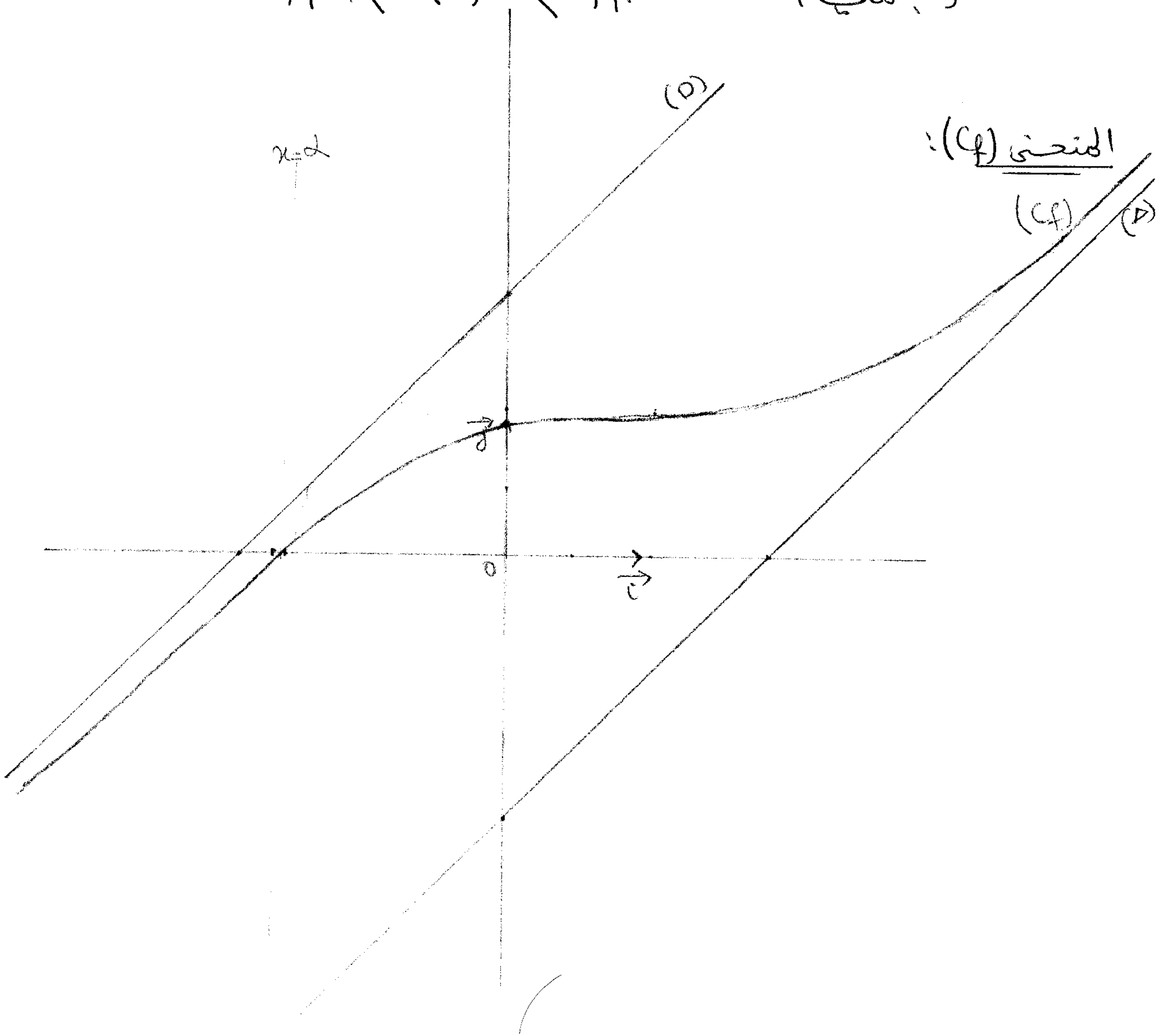
<u>حصر</u> $A(\alpha)$: لدينا $-1,8<\alpha<-1,7$ ومنه $1,7<-\alpha<1,8$

و $\ln0,2<\ln(\alpha+2)<\ln0,3$.

و: $\ln0,2+1,7<\ln(\alpha+2)-\alpha<\ln0,3+1,8$

وبالتالي: $0,4<A(\alpha)<2,4$.

<u>المنحنى (C_f)</u>:



الموضوع الثاني.

التنقيط	الإجابة النموذجية

التمرين الأول:

1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 11:

0,5 .... $3^0\equiv 1[11]$ ؛ $3^1\equiv 3[11]$ ؛ $3^2\equiv 9[11]$ ؛ $3^3\equiv 5[11]$ ؛ $3^4\equiv 4[11]$ ؛ $3^5\equiv 1[11]$.

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $3^{5k}\equiv 1[11]$ ؛ $3^{5k+1}\equiv 3[11]$ ؛ $3^{5k+2}\equiv 9[11]$ ؛ $3^{5k+3}\equiv 5[11]$ ؛ $3^{5k+4}\equiv 4[11]$.

2) لدينا

0,5 .... $4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv\left(4\times(3^{5n+3})^2+7\times(3^{5n+3})^4\times 3-8\right)[11]$

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(4\times 5^2+7\times 5^4\times 3-8)[11]$.

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(4\times 3+7\times 9\times 3-8)[11]$.

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(1+2-8)[11]$.

أي: $4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv 6[11]$.

3) إيجاد العدد الطبيعي n حيث: $n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv 0[11]$

1 ....

لدينا: $n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+3^{5n}\times n+3^{5n+3}+5)[11]$.

$n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+n+5+5)[11]$.

$n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+n+10)[11]$.

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2\equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$n^2+n+10\equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10

ومنه: $n=11k+3$ أو $n=11k+7$ مع $k\in\mathbb{N}$.

4) إيجاد قيم β الصحيحة حيث: $80^{3n+2}\times\beta+91^{3n+1}\equiv 0[11]$:

0,5 ....

لدينا: $80^{3n+2}\times\beta+91^{3n+1}\equiv 0[11]$ أي $3^{3n+2}\times\beta+3^{3n+1}\equiv 0[11]$ أي $3^{3n+1}(3\beta+1)\equiv 0[11]$

ومنه $3\beta+1\equiv 0[11]$ إذن: $\beta\equiv 7[11]$ أي $\beta=11k+7$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

0,5 .... استنتاج قيم β حيث: $|\beta|\leq 20$:

$|\beta|\leq 20$ معناه $|11k+7|\leq 20$ معناه: $-20\leq 11k+7\leq 20$ ومنه $-2\leq k\leq 1$

أي: $k\in\{-2,-1,0,1\}$ وبالتالي: $\beta\in\{-15,-4,7,18\}$.

5) إيجاد (x,y) من $\mathbb{N}^2$ حيث: $14^x+25^y\equiv 8[11]$:

1 ....

لدينا $14^x+25^y\equiv 8[11]$ معناه $3^x+3^y\equiv 8[11]$

لما $x=5k$ فإن $1+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 7[11]$ مستحيلة.

لما $x=5k+1$ فإن $3+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 5[11]$ إذن $y=5k'+3$.

لما $x=5k+2$ فإن $9+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 10[11]$ مستحيلة.

لما $x=5k+3$ فإن $5+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 3[11]$ ومنه $y=5k'+1$.

لما $x=5k+4$ فإن $4+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 4[11]$ ومنه $y=5k'+4$.

وبالتالي: $(x,y)\in\{(5k+1,5k'+3);(5k+3,5k'+1);(5k+4,5k'+4)\}$ ، $k\in\mathbb{N}, k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثاني :

I) 1) i حل للمعادلة $P(z)=0$ لأن : $P(i)=-i+(4+i)+13i-4-13i=0$. — 0,25

2) $P(z)=(z-i)(az^2+bz+c)$ بعد النشر والمطابقة نجد : $a=1$ ، $b=-4$ ، $c=13$ — 0,75

ويكون : $P(z)=(z-i)(z^2-4z+13)$.

3) حل المعادلة $P(z)=0$: — 1

$P(z)=0$ معناه $\begin{cases} z-i=0 \\ z^2-4z+13=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z=i \quad ...(1) \\ z^2-4z+13=0 \quad ...(2) \end{cases}$

المعادلة (2) لها مميز $\Delta=36i^2$ ومنه فالمعادلة تقبل حلين هما : $z_1=2-3i$ و $z_2=2+3i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $\{i,\ 2-3i,\ 2+3i\}$

II) 1) عبارة الدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي :

$z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z+\frac{4+\sqrt{2}}{2}+\frac{6-5\sqrt{2}}{2}i$.

ومنه نجد $z_{A'}=2+(3-2\sqrt{2})i$. — 0,5

2) النقط A' ، B ، C على استقامة واحدة لأن لها نفس الفاصلة 2 فهي إذن تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x=2$. — 0,5

(يمكن استعمال توازي الشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA'}$).

3) عبارة التحاكي H : — 1

العبارة العامة من الشكل $z'=az+b$.

ولدينا : $\begin{cases} z_B=az_B+b \\ z_C=az_{A'}+b \end{cases}$ بالطرح نجد : $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد : $b=2-3\sqrt{2}+\left(3-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)i$

وبالتالي عبارة التحاكي H هي :

$$z'=\frac{3\sqrt{2}}{2}z+(2-3\sqrt{2})+\left(3-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)i.$$

التمرين الثالث :

I) 1) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة g' حيث : — 0,5

$g'(x)=2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$. ونلاحظ أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ يكون — 0,5

$g'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

2) $g(1)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=-\infty$ — 0,5

وبما أن g متزايدة على $]0,+\infty[$ نستنتج أن $g(x)<0$ على المجال $]0,1[$ و $g(x)>0$ على المجال $]1,+\infty[$.

II (1 . $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$ لأن : $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ 0,25

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته : $x=0$ 0,25

2) أ) بوضع $\sqrt{x}=t$ يكون : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t^2}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2\ln t}{t} = 0$ 0,5

ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$ 0,5

ب) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(1-x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة.... 1

$y=1-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

جـ) لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f(x) - y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ وبما أن 0,5

$\sqrt{x}>0$ من أجل كل $0<x$ فإن إشارة $f(x)-y$ من إشارة $\ln x$.

وبالتالي : إذا كان $x \in]0,1[$ فإن $\ln x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) .

إذا كان $x \in]1,+\infty[$ فإن $\ln x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) .

إذا كان $x=1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(1,0)$.

3) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث 0,5

$f'(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}}\ln x}{(\sqrt{x})^2} - 1$ أي : $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} - 1$ أي : $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب) بما أن $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$. 1,25

ونستنتج أن : f متزايدة تماما على المجال $]0,1]$ و متناقصة تماما على

المجال $[1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

4) رسم (C_f) و (Δ) 0,25+0,5