امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

* دورة رجب 1436 / ماي 2015 *

الشعبة: تقني رياضي — المدة: 4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

ملاحظة: التنظيم والدقة في الإجابة تؤخذ بعين الإعتبار.

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

I/ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z و الوسيط الحقيقي α التالية:

$$\mathbf{(E)...z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0}$$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه.
2. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\mathbf{(E)\Leftrightarrow(z-\alpha i)(z^2+az+b)=0}$
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

II/ في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط C,B,A و G التي لواحقها:

$$\mathbf{z_A=\alpha i}\quad,\quad\mathbf{z_B=2+3i}\quad,\quad\mathbf{z_C=\overline{z_B}}\quad,\quad\mathbf{z_G=5}$$

1. بين أن z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي: $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha+5}{2}\right)$.
2. عين z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة G بالدوران r الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.
3. احسب z_G-z_A و z_F-z_E، ثم اكتب العدد $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسي. ماذاتستنتج ؟
4. أ - بين أن: $\frac{z_F-z_E}{z_G-z_A}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$

   ب - عين قيمتي α التي تكون من أجلها النقط A، E و F في استقامية.

   ج - من أجل قيمتي α المتحصل عليهما سابقا بين أن A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

   د - استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث ABC.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3;2;1)$، $B(3;5;4)$، $C(0;5;1)$.

1. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
2. تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)^t$ ناظمي للمستوي (ABC). ثم استنتج معادلته الديكارتية.
3. أ - عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

   ب - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل G و يعامد المستوي (ABC).

جـ - نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ ، عين العدد t حتى يكون $AS^2 = AB^2$.
د - عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ، ثم احسب حجمه.

4. بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين.

5. أ - عين طبيعة (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $||\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}|| = 6$.

ب - عين الوضع النسبي بين المستوي (ABC) و المجموعة (S) .

التمرين الثالث: (5 **نقاط**) (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ و : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1/ احسب الحدين : U_2 و U_3 .

2/ برهن بالتراجع على أنه مهمايكن العدد الطبيعي n : $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

- تحقق أن : U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن : U_n و U_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3/ لتكن (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n + \dfrac{1}{3}$.

أ - بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب - اكتب V_n و U_n بدلالة n .

4/ أ - احسب : $PGCD\Big((4^6-1),(4^5-1)\Big)$.

ب - عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD\Big((4^{n+1}-1),(4^n-1)\Big)$.

5/ أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7 .

ب - احسب بدلالة n المجموع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

جـ - عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7 .

التمرين الرابع: (6 **نقاط**) $k \in \mathbb{R}_+^*$ ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = x - 1 + xe^{kx}$.

(C_k) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I/ نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g_k(x) = 1 + (1+kx)e^{kx}$.

1. احسب المشتق $g'_k(x)$ و ادرس إشارته.

2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم بين أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : g_k(x) > 0$.

II/ 1. أ - بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيينها.

ب - احسب نهاية الدالة f_k بجوار $\pm\infty$.

جـ - بين أن المستقيم $(D) : y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_k) .

2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f_k ثم كون جدول تغيراتها.

3. أ - اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_k) عند $A(0;-1)$.

ب - بين أن النقطة $F_k\Big(-\dfrac{2}{k};-\dfrac{2}{k}\Big(1+e^{-2}\Big)-1\Big)$ نقطة انعطاف لـ (C_k) .

4. أ - بين أن $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً $0 \le \alpha \le 1$.

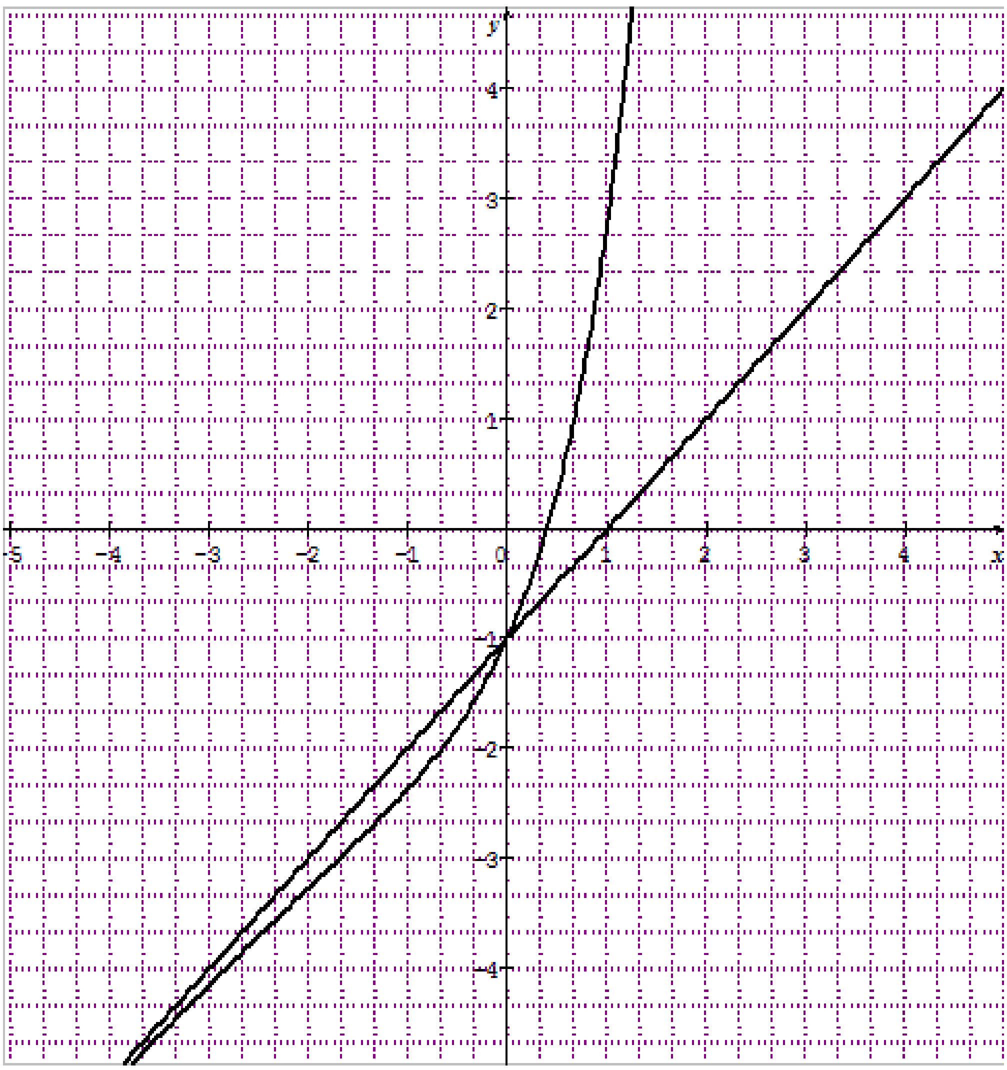
ب - لتكن $N(\alpha;f_1(\alpha))$ ، بين أن : $d\Big(N;(D)\Big) = \dfrac{\alpha e^{\alpha}}{\sqrt{2}}$.

5. أ - بين أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_k) و (C_{-k}) .

ب - الشكل المرفق يمثل المنحني (C_1) . أرسم على نفس الشكل المنحني (C_{-1}) .

III/ λ عدد حقيقي سالب تماما . نعتبر التكامل التالي : $I_k = \int_{\lambda}^{0} -xe^{kx}dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ علل 2. احسب I_1 ثم $\lim_{\lambda\to-\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة. 3. بين أن $\lim_{\lambda\to-\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 **نقاط**)

/I b, a و c أعداد طبيعية حيث : $1 \leq a \leq b \leq c$.

عين الأعداد b, a و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون لدينا : $b + c = \overline{46}^{a}$ و $bc = \overline{545}^{a}$.

/II نعتبر المعادلة : $21x - 17y = 8 ....(1)$ ، حيث x و y عددين طبيعيين.

1. أ - عين الثنائية $(x_0; y_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب - حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13 .

ب - بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha; \beta)$ حل للمعادلة (1) فإن : $3^{34\alpha+20} - 9^{21\beta} - 2 \equiv 0[13]$.

3. أ - بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (1) و $x \equiv 0[4]$ فإن $y \equiv 0[4]$.

ب - عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي يكون من أجلها : $PGCD(x; y) = 4$.

التمرين الثاني: (5 **نقاط**)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \sqrt{3} + 3i$ على الترتيب.

/1 أ - اكتب العبارة المركبة للتحويل S الذي مركزه O ويحول A إلى B ثم عين طبيعته وعناصره المميزة.

ب - عيّن العبارة التحليلية للتحويل S ، ثم أكتب x و y بدلالة x' و y' .

ج - عين صورة الدائرة التي مركزها النقطة ω ذات اللاحقة $z_\omega = -\sqrt{3}i$ ونصف قطرها $\rho = 2$.

/2 نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = S(A_n) \quad , \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

نرمز إلى لاحقة النقطة A_n بالرمز Z_n .

أ - أنشيء في المستوي المركب النقط : A_0, A_1, A_2 .

ب - برهن أن : $Z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$ حيث n عدد طبيعي .

ج - عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تنتمي النقطة A_n إلى (OA_1) .

/3 نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = A_0A_1 \\ U_n = A_nA_{n+1} \quad , \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

أ - بيّن أن (U_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q وحدها الأول U_0 .

ب - أكتب U_n بدلالة n . ج - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$. ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثالث: (5 **نقاط**) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

لتكن النقط : $A(2; 1; 3)$ $B(-3; -1; 7)$ $C(3; 2; 4)$

/I أثبت أن النقط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

/II ليكن المستقيم (D) المعرف بـ : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1/ بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .   2/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3/ بين أن النقطة $F(1;1;5)$ تنتمي إلى (ABC) ولا تنتمي إلى (D) .

4/ عين النقطة L المسقط العمودي لـ F على (D) .   5/ استنتج بعد النقطة F على (D) .

III/ لتكن H النقطة المشتركة بين (D) و (ABC) .

1/ بين أن النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$.

2/ حدد طبيعة المجموعة (T) للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{CB}\right)=0$

3/ حدد طبيعة المجموعة (T') للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

4/ عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(T\cap T')$.

5/ هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى $(T\cap T')$.

التمرين الرابع: (6 **نقاط**) I/ بين أن : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x-1)}{x}=-1$

II/ نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ - بين أنه : $\forall x\geq 1: f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

ب - من أجل $x\geq 1$ بين أن : $x-1=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$.

ج - بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 فسر النتيجة هندسيا.

2) أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب - بين أنه : $\forall x>1: f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج - ارســم المنحني (C_f) .

3) لتكن S مساحة الحيز الواقع بين (C_f) ومحور الفواصل والمحدد بالمستقيمين $x=1$ و $x=3$.

B,A نقطتان من (C_f) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 ، و النقطتان $P(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي.

أ - احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ .

ب - استنتج أن : $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. (**ملاحظة** : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$).

III/ نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ ، (C_g) تمثيلها البياني.

1) بين أنه : $\forall x\geq 0: g(x)\geq 1$.

2) أ - بين أن : $g\circ f(x)=x$ ، ثم بين أنه إذا كانت النقطة $M(x;y)\in(C_f)$ فإن النقطة $M'(y;x)\in(C_g)$.

ب - ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟ ارسم المنحني (C_g) في المعلم السابق.

3) لتكن S' مساحة الحيز D' الواقع بين (C_g) و $y=3$ و المحدد بالمستقيمين $x=0$ و $x=2\ln(1+\sqrt{2})$.

أ - بين أن : $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب - احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S .