

إختبار البكالوريا التجريبية في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. (I) عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 .
2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2000^{2015} على 11 .
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $9^{5n+2} + n - 2$ قابلا للقسمة على 11 .
- (II) 1. عين الـ $PGCD(2012; 2515; 3521)$.
2. عيّن الأعداد الطبيعية x التي تحقق : $7x \equiv 4[5]$.
3. حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3521x - 2515y = 20125 \dots (1)$.
4. عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حلول المعادلة (1) بحيث : $|y - x| \leq 4$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (I) ليكن z عددا مركبا و نعتبر كثير الحدود : $P(z) = z^4 + 6z^3 + 30z^2 + 48z + 40$.
1. بين أنه ن أجل كلّ عدد مركب z فإنّ $P(z) = (z+1-i)g(z)$ ، حيث $g(z)$ كثير حدود يطلب تعيينه .
2. تحقق أنّ $g(-1-i) = 0$ ثمّ حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $g(z) = 0$.
- (II) نعتبر في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط A ، B ، C ، و D صور الأعداد المركبة :
 1. اكتب العدد المركب Z حيث $Z = z_A + z_D + 1$ على الشكل المثلثي ثم الشكل الأسي .
 2. احسب العدد $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$.
 3. عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا .
 4. عيّن المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي صور الأعداد المركبة z بحيث يكون :

$$k \in \mathbb{Z} ; \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
 5. عيّن العدد المركب z_F لاحقة النقطة F بحيث يكون $\frac{z_F - z_C}{z_F - z_A} = i$ و استنتج طبيعة المثلث AFC .
 6. عيّن المجموعة (Γ_2) للنقط M من المستوي صور الأعداد المركبة z بحيث : $z = z_A + ke^{\frac{i\pi}{3}}$ مع k عدد حقيقي موجب

التمرين الثالث: (03 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و نعتبر النقط : $A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ و $C(1;3;3)$.

1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.
2. نعتبر المستويين (P) و (Q) حيث : $(P): x-2y+2z-1=0$ و $(Q): x-3y+2z+2=0$.
بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
3. ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) . اعط احداثيات النقطة H ثم استنتج بعد النقطة A عن (Δ) .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) لتكن g دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعارة : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$.

1. احسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.
2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة g و اعط جدول تغيراتها .
3. احسب $g(1)$ و استنتج اشارة $g(x)$ على مجموعة تعريفها.

(II) لتكن h الدالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعارة : $h(x) = 1 - x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها و بين أن (C_h) يقبل مستقيما مقاربا عموديا.
2. بين أن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $h'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ ، حيث h' هي الدالة المشتقة للدالة h .
3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة h و اعط جدول تغيراتها .
4. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_h) .
ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_h) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
5. أنشيء المنحني (C_h) .

(III) نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} الدالة f ب : $f(x) = xe^{\frac{x}{2}} - e^x + 1$.

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = h(e^x)$.
2. احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها و فسّر النتائج المتحصّل عليها هندسيا .
3. أعط جدول تغيرات الدالة f .

(IV) نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} المتتالية العددية (u_n) بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n بالعارة :

$$u_{n+1} = \frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} + 1$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \geq 1$.
2. بين أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = h(u_n) + u_n$.
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
4. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حد نهايتها .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة : $(z-1+i)[z^2 - 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3}] = 0$.
2. نعتبر في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقطة A ، B و C التي لواحقها $z_A = 1-i$ ، $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ و $z_C = 2 + \sqrt{3} - i$ على الترتيب.
 - أ. بيّن أنّ $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 2$ و استنتج انشاء النقطة B ثم انشيء في المستوي النقطة A ، B و C .
 - ب. عين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.
 - ج. اكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_{B'}}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي و استنتج عمدة للعدد المركب z_B .
3. لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن النقطة O لاحقتها العدد المركب $Z = ae^{i\theta}$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي و لتكن M_1 صورة النقطة M بالدوران r و M' نظيرة النقطة M_1 بالنسبة لحامل محور الفواصل.
 - أ. بيّن أنّ Z' لاحقة النقط M' يكتب $Z' = ae^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$.
 - ب. عين مجموعة قيم العدد الحقيقي θ بحيث يكون $Z' = Z$ ثم استنتج مجموعة النقط من المستوي بحيث تكون M' منطبقة على M .

التمرين الثاني: (03 نقاط)

1. بيّن أنّ العدد 409 أولي ثم استنتج أنّ العددين 409 و 1207 أوليان فيما بينهما.
2. نعتبر المعادلة (1) $409x - 1207y = 20$ ذات المجهولين الطبيعيين x و y .
 - أ. بيّن أنّ $(1210; 410)$ حل للمعادلة (1).
 - ب. استنتج في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (1).
3. ليكن n عددا طبيعيا يكتب في نظام العد الذي أساسه 5 على الشكل $\alpha\beta 020$ و في نظام العد الذي أساسه 6 على الشكل $\beta\alpha\beta 50$ ، حيث α و β عددان طبيعيان. عين العددين α و β و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} المتتالية العددية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 0$ و الثاني $u_1 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n
 - أ. احسب u_2 ، u_3 و u_4 .
 - ب. برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
 - ج. في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ أنشيء المستقيمين (D) و (Δ) اللذين معادلتاهما

على الترتيب هما : $y = \frac{1}{2}x + 3$ و $y = x$.

د . مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 دون حسابها ، مبرزا خطوط التمثيل .
اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2 . نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} المتتالية العددية (v_n) ب : $v_n = u_n - 6$.

أ . بين أن المتتالية (v_n) هندسية و عيّن أساسها q و حدّها الأول v_0 .

ب . أكتب بدلالة n عبارة v_n و استنتج عبارة u_n .

ج . بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ أحسب نهايتها .

التمرين الرابع : (08 نقاط)

من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} الدالة f_n ب $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$ و نرمز ب (C_n) إلى

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(I) دراسة الدالة f_1 المعرفة على \mathbb{R} ب $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$.

1 . تحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

2 . أ . بين أنّ المنحني (C_1) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكلّ منهما .

ب . أثبت أنّ الدالة f_1 متزايدة تماما على \mathbb{R} .

ج . برهن أن من أجل كلّ عدد حقيقي x فإنّ : $0 < f_1(x) < 4$.

3 . أ . بين أنّ النقطة I_1 ذات الإحداثيين $(\ln 7; 2)$ مرز تناظر للمنحني (C_1) .

ب . عيّن معادلة ديكارتية للمماس (T_1) للمنحني (C_1) في النقطة I_1 .

ج . أنشيء المماس (T_1) و المنحني (C_1) .

4 . أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_1) و المستقيمت التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 3$.

(II) دراسة بعض خواص الدالة f_n .

1 . بين أنّ من أجل كل عدد حقيقي x ، فإنّ : $f_n(x) = f_1(nx)$ و استنتج تغيرات الدالة f_n .

2 . أثبت أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المنحني (C_n) .

3 . أ . بين أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n يقطع المستقيم الذي معادلته $y = 2$ المنحني (C_n) في نقطة واحدة يطلب

تحديد فاصلتها ، نرمز لهذه النقطة ب I_n .

ب . عيّن معادلة ديكارتية للمماس (T_n) للمنحني (C_n) في النقطة I_n .

ج . أنشيء المماس (T_2) و المنحني (C_2) .