ثانوية المقراني — س د : 2014 / 2015

الشعبة : تقني رياضي — المدة : 04 سا 30 د

بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 ن)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط :

$A(2,-3,-1)$ ، $B(1,0,2)$ ، $C(0,1,3)$

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست في إستقامية ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) من أجل كل عدد حقيقي θ من المجال $]-\pi,\pi]$ نعتبر المجموعة (S_θ) مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x\cos\theta-2y\sin\theta+2z=0$

أ – بين أن (S_θ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω_θ و نصف قطرها r

ب – عين حسب قيم θ ، تقاطع سطح الكرة (S_θ) و المستوي (ABC)

جـ – في حالة المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_θ) ، عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من ω_θ عموديا على المستوي (ABC) ، ثم استنتج احداثيات نقطة تقاطع سطح الكرة (S_θ) و (ABC)

التمرين الثاني : (05 ن)

نعتبر في المستوي المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $2cm$) النقط A ، B ، C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $Z_A=2i$ ، $Z_B=2$ ، $Z_C=4+6i$ ، $Z_D=-1+i$ و $Z_E=-3+3i$

1) علّم النقط (يتمم الرسم في باقي التمرين)

2) عين طبيعة المثلث ABC

3) لتكن f التشابه المباشر حيث : $f(A)=D$ و $f(B)=A$

أ – أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر f ، ثم عين زاويته ، نسبته و مركزه Ω

ب – بين أن المثلث DAE هو صورة المثلث ABC بالتشابه f

جـ – استنتج طبيعة المثلث DAE

4) نرمز بـ (Γ_1) للدائرة التي قطرها $[AB]$ و بـ (Γ_2) للدائرة التي قطرها $[AD]$ و بـ M للنقطة الثانية تقاطع الدائرة (Γ_1) و المستقيم (BC) و N للنقطة الثانية تقاطع الدائرة (Γ_2) و المستقيم (AE)

أ – عين صورة النقطة M بالتشابه f

ب – استنتج طبيعة المثلث ΩMN

التمرين الثالث : (04 ن)

1) (U_n) متتالية معرفة كما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n . e^{-U_n}$

- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$
- قارن بين : $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 ، ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)
- ماذا يمكن القول عن تقارب المتتالية (U_n) ، حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \ln(U_n)$

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = V_n - V_{n+1}$
- من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ ؛ برهن أن : $S_n = V_0 - V_{n+1}$
- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

التمرين الرابع : (07 ن)

I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى الملم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

2) أ – بيّن أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$) ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب – بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له

جـ – أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) أ – بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب – أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أرسم (Δ) و (C_f)

5) ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = m + x$

6) أحسب ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات : $x = 1$ ، $x = 2$ و (Δ)

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 ن)

نعتبر في المستوي المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :
$a=2$ ، $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$

1) أ – عين قيس للزاوية $\widehat{ABC}$

ب – استنتج أن ω لاحقة المركز Ω للدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي : $1+i\sqrt{3}$

2) (z_n) متتالية أعداد مركبة ، حدها الأول $z_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2$

و من أجل كل عدد طبيعي n : نرمز بـ A_n للنقطة ذات اللاحقة z_n

أ – عين لواحق النقط A_2 ، A_3 و A_4

ب – قارن بين أطوال القطع المستقيمة $[A_1A_2]$ ، $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$

جـ – بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1}-\omega=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$

د – استنتج أن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة A_n بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة

هـ – برر أن : من أجل كل عدد طبيعي n لنا : $A_{n+6}=A_n$. عين لاحقة النقطة A_{2015}

3) عين من أجل كل عدد طبيعي n : طول القطعة المستقيمة $[A_nA_{n+1}]$

التمرين الثاني : (04 ن)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط :
$A(1,-1,3)$ ، $B(0,3,1)$ ، $C(6,-7,-1)$ ، $D(2,1,3)$ و $E(4,-6,2)$

1) أ – بين أن مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2);(B;-1);(C;1)\}$ هي النقطة E

ب – استنتج المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$

2) أ – بين أن النقط A ، B و D تعين مستوي

ب – بين أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD)

جـ – عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD)

3) أ – عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC)

ب – عين احداثيات النقطة F نقطة تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD)

4) بين أن المستوي (ABD) و المجموعة (Γ) متقاطعان ، عين العناصر المميزة لهذا التقاطع

التمرين الثالث : (04 ن)

1) حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$

2) نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق : $f(0) = 1$ ، عين عبارة $f(x)$

3) n عدد طبيعي

أ – أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

ب – استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2015) - 4$

4) أ – أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = f(0) + f(1) + ... + f(n)$

ب – عين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

التمرين الرابع : (07 ن)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 - xe^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بيّن أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,8 < \alpha < 0,9$

3) عيّن حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x + 2}{e^x + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا

2) أ – أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب – بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ) ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

4) أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{\left(e^x + 2\right)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب – بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)

6) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

III) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n < \alpha$

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 و u_2 ، ثم خمّن اتجاه تغير (u_n)

3) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

انتهى الموضوع الثاني و بالتوفيق