

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^5$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب

$\overline{bbab}^8$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

(1) بين أن N يحقق : $309a + 15c = 226b$.

(2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b .

(3) فيما يلي نفرض أن : $b = 3$.

أ) بين أن، $309(a-2) = 60 - 15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر

النقط A, B و I التي لواحقها على الترتيب، $z_A = -2$ ، $z_B = -1 + i$ و $z_I = i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq -2$ نضع : $z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z' = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة

M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها.

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أن : $z' - i = \frac{1 - i}{z + 2}$.

(ب) استنتج أن : $IM' \times AM = \sqrt{2}$ وأن $(\vec{u}, \overline{IM'}) + (\vec{u}, \overline{AM}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
 (ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها.

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u}, \overline{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
 (ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E .

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ثم بين أن

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة

(ج) هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة؟ عين نهايتها.

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

(ج) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير

الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x$.

4) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5) أرسم (Δ) و (C_g) .

6) استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$

1) برهن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ ثم أحسب:

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$

الظان

الظان

الظان

الظان

الظان

الظان

الظان

الموضوع الثاني

سلطان

التمرين الأول (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0; \pi]$.

نعتبر الأعداد المركبة: $z_0 = r(-\cos \theta + i \sin \theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin \theta + i \cos \theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي.

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون: $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عين عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا.

3) نفرض $r=1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر
النقط A, B و C التي لواحقها: z_1, z_0 و z_2 على الترتيب.

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 2), (B; 2), (C; -1)\}$.

ب) عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ،

$$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 3$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E): 5x - 6y = 3$

1. أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

$$\text{ج) استنتج حلول الجملة (S): } \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

2. a و b عدنان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

• عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

التمرين الثالث (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3; -2; 2), B(6; 1; 5), C(6; -2; -1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$
- (1) برهن أن المثلث ABC قائم .
 - (2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .
 - (3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .
 - (4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P') .
 - (5) أ) نعتبر النقطة $D(0; 4; -1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .
ج) بين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.
د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC)

التمرين الرابع : (08 نقاط)

- I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ :
- $$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$$
- نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$ ،
ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
 - 2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - 3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8 < \alpha < 1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0), f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f) .

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = x + m$: (E)

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$.

1- أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1 .

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب) أحسب I_2 .

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا



تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 **شعبة : رياضيات**
الموضوع الاول

التمرين الاول (04 نقاط)

لدينا : $N = \overline{abcca}^5$ و $N = \overline{bbab}^8$

(1) تبيان أن N يحقق : $309a + 15c = 226b$

• لدينا : $N = a \times 5^4 + b \times 5^3 + c \times 5^2 + c \times 5 + a \times 5^0 = 625a + 125b + 25c + 5c + a = 626a + 125b + 30c$

• ولدينا : $N = b \times 8^3 + b \times 8^2 + a \times 8 + b \times 8^0 = 512b + 64b + 8a + b = 577b + 8a$

أي $N = 577b + 8a$

• إذن : $626a + 125b + 30c = 577b + 8a$

أي $618a + 30c = 452b$ ومنه $309a + 15c = 226b$ [01]

(2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b :

• لدينا : $3(103a + 5c) = 226b$

لدينا : $3 \nmid 226$ و $3 \nmid 1$ ومنه $3 \mid b$ حسب مبرهنة غوص [0.25]

(3) نفرض $b = 3$

(أ) تبيان أن : $309(a - 2) = 60 - 15c$

• لدينا : $3(103a + 5c) = 226b$ ومنه $309a + 15c = 678$

• ولدينا : $309a - 618 = 60 - 15c$

ومنه $309(a - 2) = 60 - 15c$ [0.75]

(ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a - 2$:

• لدينا : $309(a - 2) = 5(12 - 3c)$

$5 \nmid 309$ و $5 \nmid 1$ ومنه $5 \mid (a - 2)$ حسب مبرهنة غوص .

• استنتاج قيمة a :

بما أن $5 \mid (a - 2)$ فإن : $a - 2 = 5k (k \in \mathbb{N})$

ولدينا : $a < 5$ أي أن : $a = 2$ [0.75]

• استنتاج قيمة العدد c :

لدينا : $309 \times 2 + 15c = 678$ ومنه $15c = 678 - 618$ أي $c = 4$ [0.75]

(ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10 :

[0.5] $N = 577(3) + 8(2) = 1747$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

• لدينا : $z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2}$ من أجل $z \neq -2$

-1 (أ) التحقق من أن : $z' = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}$

لدينا : $z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2} = \frac{i\left(z + \frac{i}{i} + \frac{1}{i}\right)}{z + 2} = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}$

$$0.25 \dots\dots\dots z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

(ب) تبين أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$:

- لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$
- ولدينا : $OM' = 1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها

$$0.5 \dots\dots\dots R=1$$

(ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :

- z' تخيلي صرف معناه $Arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي $Arg(i) + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- معناه : $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi$

$$(AM; BM) = k\pi \text{ أي}$$

- المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B .

$$0.5 \dots\dots\dots (E) = (AB) - \{A, B\}$$

$$2- \text{ أ) التحقق من أن : } z' - i = \frac{1-i}{z+2}$$

$$0.25 \dots\dots\dots z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ أي } z' - i = \frac{iz+i+1}{z+2} - i = \frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \frac{1-i}{z+2}$$

$$\text{ب) استنتاج أن : } IM' \times AM = \sqrt{2}$$

$$\bullet \text{ لدينا : } z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ ومنه } |z' - i| = \frac{|1-i|}{|z+2|} \text{ أي } |z' - i| = \frac{|1-i|}{|z+2|}$$

$$0.25 \dots\dots\dots IM' \times AM = \sqrt{2} \text{ ومنه } IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$$

$$\bullet \text{ استنتاج أن : } (\vec{u}, IM') + (\vec{u}, AM) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{لدينا : } z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ ومنه } Arg(z' - i) = Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$$

$$\text{أي } Arg(z' - i) = Arg(1-i) - Arg(z+2) \text{ ومنه } Arg(z' - i) + Arg(z+2) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

0.5

$$(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ أي}$$

(ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :

• لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM = 1$

• ولدينا : $IM' \times AM = \sqrt{2}$

0.5 أي $IM' = \sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R = \sqrt{2}$

$$z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

$$AE = |z_E - z_A| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

0.25 ومنه $E \in (\Gamma)$

• تبيان أن : $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = \arg(z_{\overrightarrow{AE}}) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0.5 أي $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

(أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ أي } (\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ولدينا } EE' = \sqrt{2}$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{7\pi}{12}[2\pi] \text{ ومنه}$$

(أ) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :

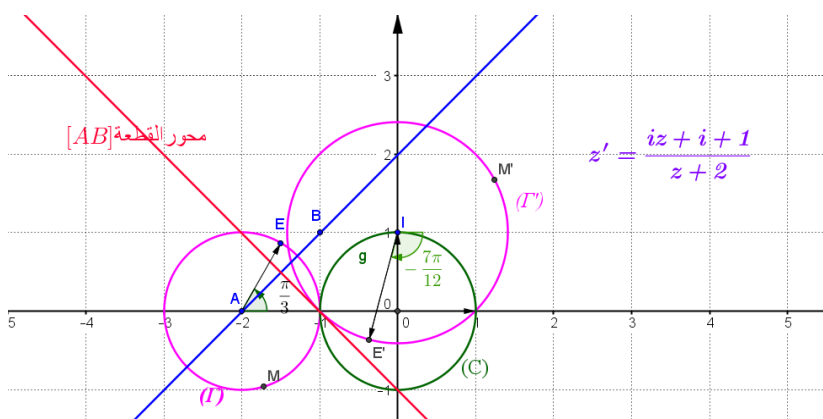
لدينا : $IE' = \sqrt{2}$ ومنه E' تنتمي إلى الدائرة (Γ') ذات المركز $I(i)$ ونصف القطر $\sqrt{2}$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ أي } (\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ومنه}$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

الرسم :

0.5



التمرين الثالث : (05 نقاط)

• لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

ومنه : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ **0.25**

(2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن :

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$$

- لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $0 < 2u_n < 1$ أي $1 < 2u_n + 1 < 2$

$$\text{وبالتالي } 1 < \frac{1}{2u_n + 1} < 2 \text{ إذن } -1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$$

وأخيرا : $0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n **0.75**

(ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

• لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ **0.25**

• تبين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة :

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$

- لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $-1 < -2u_n < 0$ أي $0 < 1 - 2u_n < 1$

وبالتالي : $0 < u_n(1-2u_n) < \frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1$ ومنه $0 < \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة..... [0.5]

(ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

..... [0.25] $\frac{1}{2}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ [0.25]

(3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية :

• لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$

أي $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{4u_n - 2u_n - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n + 1}$

..... [0.5] $v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} \times \frac{2u_n + 1}{2u_n + 1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية

..... [0.25] $v_0 = \frac{3^0 \times u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$ أساسها $q = 6$ وحدها الأول

(ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

• لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$ [0.5]

• استنتاج أن : $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $(2v_n - 3^n)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن : $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$ ومنه

0.75 $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ أي $u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

0.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لدينا : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$

(1) حساب النهايات :

• حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$:

0.25 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \end{cases}$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = 0$

0.25 التفسير الهندسي : $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_g) بجوار $-\infty$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

0.25 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \end{cases}$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = -\infty$

(2) تبين أن $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$:

• لدينا : $g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2}$

أي $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$ [0.5]

• استنتاج اتجاه تغير الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-e^{2x}$		-
$g'(x)$		-

إذن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ [0.25]

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\infty$

تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \ln(1+e^{-x}) - x$

لدينا : $g(x) = \frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} - \ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(e^x) - \ln(1+e^{-x})$

أي $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \ln(1+e^{-x}) - x$ [0.5]

(4) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)]$:

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x + x - 1 \right]$

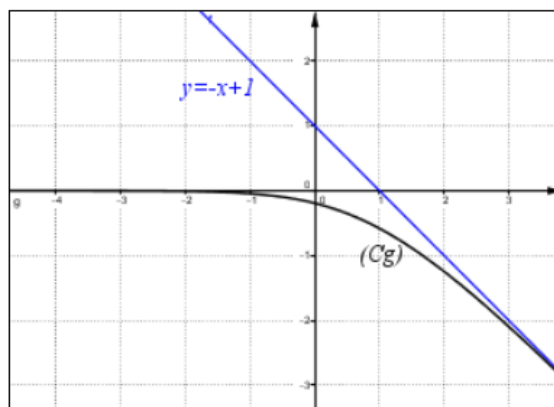
ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)] = 0$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \end{cases}$ [0.5]

تفسير النتيجة بيانيا :

المستقيم ذي المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $-\infty$ [0.25]

(5) الرسم :

0.75



0.25: استنتاج إشارة $g(x)$ (6)

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		—

II. لدينا : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$

(1) البرهان أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

• نضع $e^x = t$ وبالتالي عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \text{ إذن}$$

0.25 أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = 0$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$:

• لدينا : $f'(x) = -e^{-x} \times \ln(e^x + 1) + e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} = e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right)$

0.5 أي $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

0.25

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		—
$f'(x)$		—

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	0

0.5

(3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

0.25

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

• حساب $\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$:

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\ln 3}^0 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_{-\ln 3}^0 = -\ln 2 + \ln(1 + e^{\ln 3})$$

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = -\ln 2 + \ln 4 = -\ln 2 + 2\ln 2 = \ln 2 \text{ أي}$$

0.5

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln 2 \text{ إذن}$$

(4) حساب $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$: باستعمال المكاملة بالتجزئة

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 e^{-x} \ln(e^x + 1) dx$$

$$\text{نضع : } u'(x) = e^{-x} \text{ ومنه } u(x) = -e^{-x}$$

$$\text{و } v(x) = \ln(e^x + 1) \text{ ومنه } v'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

إذن :

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 e^{-x} \ln(e^x + 1) dx = \left[-e^{-x} \ln(e^x + 1) \right]_{-\ln 3}^0 - \int_{-\ln 3}^0 -e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + e^{\ln 3} \ln(e^{-\ln 3} + 1) + \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + 3\ln\left(\frac{1}{3} + 1\right) + \ln 2 = 3\ln\frac{4}{3}$$

0.5

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = 3\ln\frac{4}{3} \text{ إذن}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$ حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0; \pi]$

(1) كتابة الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :

- لدينا : $z_0 = r(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta))$

$$z_1 = r^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{6} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$$

(2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$

- لدينا : $\overline{z_0} = r(\cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta))$

$$r^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right) = r(\cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta)) \quad \text{معناه } z_1 = \overline{z_0}$$

$$\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi (k \in \{0; 1\}) \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \text{ وبالتالي :}$$

من أجل $k = 0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأن $\theta \in [0; \pi]$)

من أجل $k = 1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض)

0.75

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \text{ معناه } z_1 = \overline{z_0}$$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :

• لدينا :
$$\frac{z_0}{z_1} = \frac{1 \left(\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \right)}{1^2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) \right)}$$

0.25
$$\frac{z_0}{z_1} = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

اي
$$\left(\frac{z_0}{z_1} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$$

• إذن
$$\left(\frac{z_0}{z_1} \right)^n$$
 حقيقي معناه $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ أي $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

وبالتالي : $n = 2k (k \in \mathbb{N})$ 0.25

(3) لدينا : $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$

• إذن : $z_1 = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_0 = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

(أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;2), (C;-1)\}$

لدينا :
$$z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C}{2+2-1} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

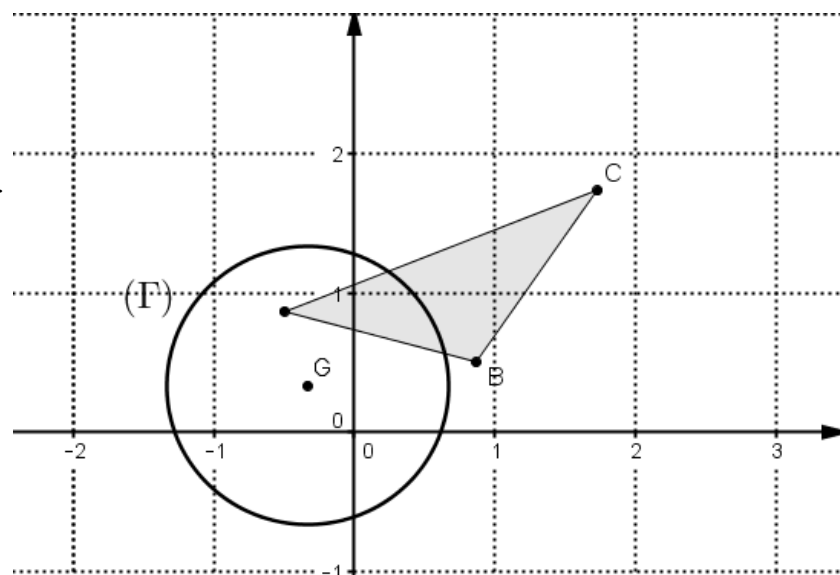
0.5
$$z_G = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

(ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

• لدينا : $\|3\overrightarrow{MG}\| = 3$ معناه $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 3$

ومنه $3MG = 3$ أي $MG = 1$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R = 1$



S 0.75

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا : $5x - 6y = 3$ (E)

(1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:

• لدينا : $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 3 + 6y$

$$5x = 3(1 + 2y)$$

لدينا : $3 \nmid 5x$ و $3 \nmid 1$ فإن $3 \mid 2y$ حسب مبرهنة غوص

0.25

أي أن x مضاعف للعدد 3

ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) :

$$\text{نفرض } x = 3 \text{ وبالتالي : } y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

0.5

إذن الثنائية $(3; 2)$ حل للمعادلة (E)

• **حل المعادلة (E) :**

- لدينا : $5x - 6y = 5 \times 3 - 6 \times 2$ يكافئ $5x - 5 \times 3 = 6y - 6 \times 2$

$$\text{أي } (*): 5(x - 3) = 6(y - 2)$$

- لدينا : $6 \nmid 5(x - 3)$ و $6 \nmid 5$ فإن $6 \mid (x - 3)$ حسب مبرهنة غوص .

$$\text{أي } x - 3 = 6k \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ وبالتالي } x = 6k + 3$$

- من أجل $x = 6k + 3$ نعوض في المعادلة (*): نجد : $5(6k + 3 - 3) = 6(y - 2)$

$$\text{ومنه } y - 2 = 5k \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ أي } y = 5k + 2$$

0.5

مجموعة حلول المعادلة : $S = \{(6k + 3; 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{ج) استنتاج حلول الجملة : } (S): \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

$$\text{أي } 6m - 1 = 5n - 4 \text{ ومنه } 5n - 6m = 3$$

$$\text{ومنه : } n = 6k + 3 \text{ وبالتالي } x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

0.75

$$x = 30k + 11 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{(2) - لدينا : } a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3 \text{ و } b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$$

• **تعيين $(\alpha; \beta)$ بحيث تكون $(a; b)$ حل للمعادلة (E) :**

$$\text{- لدينا : } a = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 243 + 90\alpha$$

$$\text{ولدينا : } b = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$$

مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ 0.75

• الثانية $(a; b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a - 6b = 3$

$$\text{ومنه } 5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$$

$$\text{أي } 1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3 \text{ ومنه } -306\alpha - 150\beta = -1212$$

بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد :

$$102\alpha + 50\beta = 404 \text{ وبالتالي الثانية } (\alpha; \beta) = (2; 4) \text{ 0.75}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا : $A(3; -2; 2), B(6; 1; 5), C(6; -2; -1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

(1) البرهان على أن المثلث ABC قائم :

$$\text{لدينا : } \overline{AB}(3; 3; 3), \overline{AC}(3; 0; -3) \text{ و } \overline{BC}(0; -3; -6)$$

$$\text{ولدينا : } AB = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{3} \text{ و } AC = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{و } BC = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{إذن لدينا : } BC^2 = 45 \text{ و } AB^2 + AC^2 = 27 + 18 = 45$$

$$\text{ومنه } BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ أي المثلث } ABC \text{ قائم في النقطة } A \text{ 0.5}$$

(2) البرهان على أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

$$\text{لدينا : } \vec{n}(1; 1; 1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P)$$

$$\text{إذن } \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ ومنه } \overline{AB} = 3\vec{n} \text{ أي } \overline{AB} \parallel \vec{n} \text{ وبالتالي } (AB) \perp (P)$$

$$\text{نعوض بإحداثيات النقطة } A \text{ في معادلة } (P) \text{ نجد : } 3 - 2 + 2 - 3 = 0 \text{ أي } A \in (P)$$

$$\text{وبالتالي : المستوي } (P) \text{ عمودي على المستقيم } (AB) \text{ ويمر من النقطة } A \text{ 0.5}$$

(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

$$\text{لدينا : } \overline{AC}(3; 0; -3) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P') \text{ وبالتالي معادلة للمستوي } (P') \text{ من الشكل :}$$

$$3x - 3z + d = 0$$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$$3(3) - 3(2) + d = 0 \text{ ومنه } d = -3$$

$$\text{وبالتالي معادلة للمستوي } (P') : 3x - 3z - 3 = 0 \text{ أي } x - z - 1 = 0 \text{ 0.5}$$

(4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

• لدينا : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$

نضع : $z=t$

0.5

وبالتالي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

(5) أ) تبين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

• لدينا : $D(0;4;-1)$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = -18 + 18 = 0$ ومنه $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = -9 + 9 = 0$ ومنه $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$

0.5

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times AD$$

- لدينا : $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

و $AD = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

0.5

$$V_{ABCD} = 27uv$$

أي $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv$

(ج) تبين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} rad$

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 - 3(-6) + 6 \times 0 = 36 + 18 = 54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DB}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$

أي $\cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

0.5

ومنه $BDC = 45^\circ$

(د) حساب مساحة المثلث BDC :

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin BDC = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27us -$$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) :

$$v_{ABDC} = \frac{1}{3} \times S_{BDC} \times d(A, (BCD)) = \frac{1}{3} \times 27 \times d(A, (BCD)) = 27 \text{ لدينا}$$

0.5

$$d(A, (BDC)) = 3$$

$$d(A, (BDC)) = \frac{27}{\frac{1}{3} \times 27} = 3 \text{ ومنه}$$

التمرين الرابع : (08 نقاط)

$$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} \text{ لدينا : I.}$$

$$(1) \text{ أ) حساب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty : \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = -\infty$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \text{ تبيان أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 1}{e \times e^x} \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases} \text{لأن} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^x} \right) = +\infty \text{ أي}$$

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

$$\bullet \text{ لدينا : } f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} + (x^2 + 1)(-e^{-x+1})] = 1 - (2x - x^2 - 1)e^{-x+1}$$

$$\text{وبالتالي : } f'(x) = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

0.5

$$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+
$f'(x)$		+

0.25

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.5

(2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+1} + e^{-x+1}) = 0$

0.25

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

• دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - x = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1}$

إذن $f(x) - x < 0$

0.5

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

• لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8; 1.9]$

ولدينا $f(1.8) = 1.8 - ((1.8)^2 + 1)e^{-1.8+1} = -0.11$

$f(1.9) = 1.9 - ((1.9)^2 + 1)e^{-1.9+1} = 0.03$

وبالتالي $f(1.8) \times f(1.9) < 0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

0.5

حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

0.5

أي $y = 1 \times (x-1) - 1 = x-2$ $(T): y = x-2$

(5) تبيان أن $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

• لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

0.25

أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

• استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

- جدول إشارة $f''(x)$:

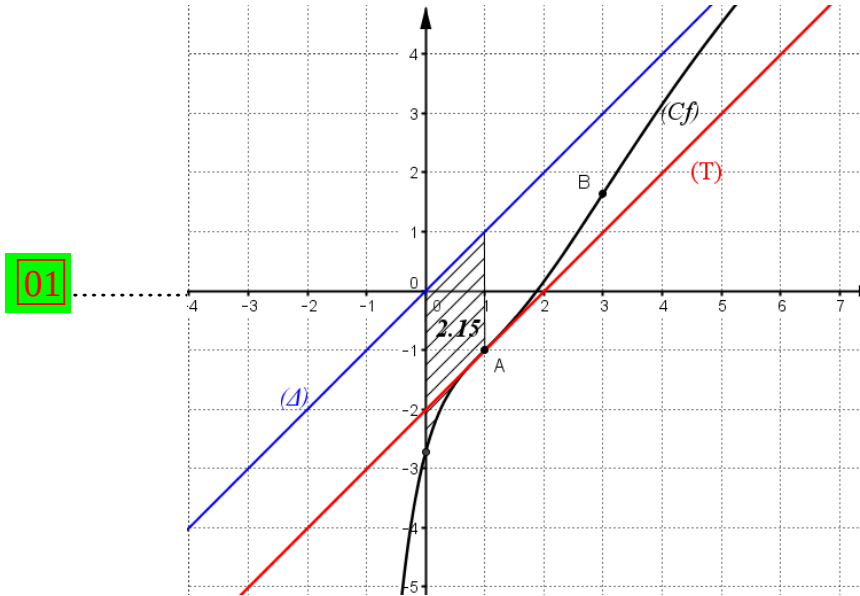
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

- المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين

0.75 (C_f) نقطتي انعطاف للمنحني $B(3; f(3)), A(1; f(1))$

6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$

الرسم :



01

7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = x + m$

- هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m = -e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- إذا كان $m \in]-e; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- إذا كان $m \in [0; +\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .

0.5

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

1- أ) تبين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث

$g(x) = xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:

- لدينا : $G'(x) = -[e^{-x+1} - (x+1)e^{-x+1}] = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1} - e^{-x+1}) = xe^{-x+1} = g(x)$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.5

ب) حساب I_1 :

لدينا : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = [- (x+1)e^{-x+1}]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2$ 0.25

2- أ) تبين أن $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

• لدينا : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$

نضع : $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$

ونضع : $v'(x) = e^{-x+1}$ ومنه $v(x) = -e^{-x+1}$

وبالتالي : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx = \left[-x^{n+1} e^{-x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x+1}) dx$

ومنه : $I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n$ 0.5

ب) حساب I_2 :

..... 0.25 $I_2 = -1 + (1+1)I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$

3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما

$x=1, x=0$:

$S = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 x - x + (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$

أي $S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx = I_2 + \left[-e^{-x+1} \right]_0^1$

$S = (2e-5-1+e)us = (3e-6)cm^2$

..... 0.5 $S = 2.15cm^2$

