ثانوية : حاسي مفسوخ — السنة الدراسية : 2015/ 2016
الشعبة : تقني رياضي — المدة : 4 سا و 30 د
امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05نقاط)

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ،

نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i$ ، $z_B=-2-4i$ ، $z_C=2-2i$

1. أكتب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على شكل أسي .
2. إستنتج طبيعة التحويل النقطي الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C
3. نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات الاحقة z إلى النقطة M' ذات الاحقة z' حيث :

$$z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i$$

- عيّن صورة النقطة A بواسطة التحويل S ثم أعط طبيعته و عناصره المميزة.

4. نسمي z_1 لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحويل S و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم B_{n+1} لاحقتها z_{n+1} هي صورة B_n التي لاحقتها z_n بالتحويل S و نعتبر العدد المركب L_n حيث :

$$L_n=\frac{z_n-z_A}{z_B-z_A}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعرف المتتاليتان العدديتين (U_n) و (V_n) بالشكل :

$$V_n=\arg(L_n) \text{ و } U_n=|L_n|$$

أ) أكتب الطول AB_{n+1} بدلالة AB_n ، ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب) عيّن طبيعة المتتالية (V_n) ، ثم اكتب كل من U_n و V_n بدلالة n

ت) إبتداء من أي رتبة n تكون النقطة B_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه A ونصف قطره 10^{-2}

ث) عيّن الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقط A ، B_1 و B_n على استقامة واحدة .

التمرين الثاني : (04نقاط)

n عددطبيعي حيث $n\geq 6$

نعتبرالعددين الطبيعيين A و B حيث $A=\overline{2310}^{\,n}$ و $B=\overline{252}^{\,n}$ في التعداد ذو الاساس n

نضع : $PGCD(A;B)=d_n$

1. بيّن أن $(2n+1)$ يقسم A و $(2n+1)$ يقسم B
2. ناقش حسب شفعية العدد n القيم الممكنة لـ : $PGCD(n^2+n;n+2)$
3. بيّن أن $d_n\in\{2(2n+1);(2n+1)\}$
4. نأخذ $n=6$ ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $Ax+By=-26$

التمرين الثالث : (05نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن النقط $A(6,0,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $C(0,0,6)$ و $D(-2,-2,-2)$.

1) أ) تحقق أنّ النّقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ $x+y+z-6=0$ هي معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC).

ج) أثبت أنّ المستقيم (OD) يقطع المستوي (ABC) في النّقطة $H(2,2,2)$.

د) تحقق أنّ النقطة H متساوية البُعْد عن النقط A ، B و C.

2) ليكن (P) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

ب) أثبت أنّ المستقيم (OD) يقطع المستوي (P) في نقطة Ω يطلب تعيين إحداثيّاتها .

3) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز Ω و نصف القطر $3\sqrt{3}$.

أ) أكتب معادلة ديكارتيّة لسطح الكرة (S).

ب) تحقق أنّ سطح الكرة (S) يشمل النقط A ، B ، C و D

ج) إستنتج تقاطع سطح الكرة (S) مع المستوي (ABC) وأعط عناصره المميّزة.

التمرين الرابع : (06نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(1+e^x\right)$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2- أدرس إتجاه تغيرات الدالة g

3- إ ستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، (وحدة الطول هي $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ،ثم فسر النتائج هندسيا .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

3) إستنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أرسم المنحني (Γ)

III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

أ- تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $h'(x)=\dfrac{-1}{1+e^x}$

ب- بإستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ج- أحسب المساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحني (Γ) ومحور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين : $x=0$ و $x=\lambda$

(حيث λ عدد حقيقي موجب تماما)

د- أحسب : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05**نقاط**)

I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول u_0 عدد طبيعي ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=10u_n+9$

– نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+1$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=10^n(u_0+1)-1$

II) 1.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $61x-39y=38$. (لاحظ أنّ $(23,35)$ حل خاص للمعادلة)

2. أ- بيّن أنّ $u_{1982}\equiv u_0\,[33]$

ب- بيّن أنّ $u_{1982}\equiv(39u_0+38)[61]$ (لاحظ أنّ $10^{60}\equiv 1[61]$)

ج – استنتج أنّ $u_{1982}\equiv 0[61]$ يكافئ $u_0\equiv 35[61]$

3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $33x'-61y'=35$: (لاحظ أن $(14,7)$ حل خاص لها)

4. علما أن $61\times 33=2013$ عين أصغر قيمة لـ u_0 التي من أجلها يكون u_{1982} قابلا للقسمة على 2013

III) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $10^{7n}\equiv 10^n\,[70]$

ب- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن : $10^{7^n}\equiv 10\,[70]$

ج- نضع : $u_0=462$ انشر العدد 2013 ، وفق الأساس 7 ،ثم عين باقي قسمة v_{2013} على 70

التمرين الثاني : (05**نقاط**)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(P) و (Q) المستويين الذين معادلتيهما على الترتيب : $x+2y+z-1=0$ و $x-z+1=0$

1) بين أن (P) و (Q) مستويين متقاطعين . هل هما متعامدان ؟

2) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

3) (π) المستوي ذي المعادلة : $x-y+z=0$.

– بين أن (π) عمودي على المستويين (P) و (Q).

4) أعط إحداثيات نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P)،(Q) و (π).

5) أ) تحقق أن النقطة $A(3,-3,4)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب) احسب بعد النقطة A عن المستوي (π) .

6) أعط معادلة لسطح الكرة (S) ذات المركز A و المماسة للمستوي (π) .

7) ماهي قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها يقطع (S) المستويات ذات المعادلات : $x+y+z+\alpha=0$ وفق دائرة (نصف قطرها غير معدوم) ؟ أعط إذن قيمة نصف القطر بدلالة α.

التمرين الثالث : (04**نقاط**)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(4z^2-a^2)(2\bar{z}+ia\sqrt{3})=0$ ، حيث $a\in\mathbb{R}_+^*$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}ai \quad ، \quad z_B=-\frac{a}{2} \quad ، \quad z_C=\frac{a}{2}$$

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد : $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_A}$.

ب) استنتج زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و يحول C إلى A .

ج) تحقق أن مركز الدوران R ينطبق على مركز ثقل المثلث ABC .

2. نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

أ. تحقق أن النقط A ، B و C تنتمي إلى المجموعة (Γ)

ب. عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة .

التمرين الرابع : (06نقاط)

I)نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ: $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{1+x^2}$

1. عين نهايات g عند أطراف مجموعة تعريفها .

2. بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(1+x^2)^2}$ ، (حيث g' هي الدالة المشتقة للدالة g)

3. أدرس حسب قيم x إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ، تحقق أن: $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II)نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، الوحدة $5cm$.

1. أ–احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x)$ (يمكن وضع $t = \dfrac{1}{x^2}$).

ب–استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .

جـ– بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.ماذا تستنتج؟

2. أ– ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .

ب– بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ت– حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ– بين أن $f(\alpha) = 1 - \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2+1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

3. ارسم المنحني (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال بـ $]0;+\infty[$: $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

أ) بين أن h دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

ب) أحسب العدد I حيث : $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

بالتوفيق