الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية : بوجادي بوقرة - عين الروى -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة : ماي 2016

الشعبة : تقني رياضي — الأستاذ: بن عريب عبد الرؤوف

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة :04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$
2. نعتبر الأعداد المركبة: $Z_A=3-2i$ ، $Z_B=1$ ، $Z_C=-3+i$ ، $Z_D=-3-i$ و $Z_I=3$

أ) علم في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B، C، D و I ثم عين نوع الرباعي $AICD$.

ب) أكتب العدد Z_A-Z_B على الشكل الأسي، ثم تحقق أن $(Z_A-Z_B)^{1436}$ حقيقي.

3. عين العدد المركب u الذي يحقق الجملة التالية: $\begin{cases}\arg(u-3+2i)-\arg(u-1)=\frac{\pi}{2}\\ |u-3+2i|\div|u-1|=1\end{cases}$
4. M نقطة من المستوي تختلف عن A و B لاحقتها Z ولتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z و التي يكون من أجلها: $L=\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}$ تخيليا صرفا.

أ) تحقق أن I تنتمي إلى (E).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب L ، عين حينئذ (E) ثم أنشأها.

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;-1;1)$ ، $B(-2;2;1)$ ، ، $C(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1)$ و $H(2;1;\frac{5}{2})$. و المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=-t+1\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1. أكتب بدلالة الوسيط الحقيقي α تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).
2. بيـن أن (AB) و (Δ) يتقاطعان في النقطة C وأنهما متعامدان.
3. (P) هو المستوي الذي يشمل المستقيمين (AB) و (Δ). تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هـي: $x+y+z-1=0$.
4. أ- بيـن أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة H على المستوي (P).

ب- لتكن D نقطة من (Δ) بحيث $AC=CD$. بين أن حجم رباعي الوجوه $HABD$ يساوي $\frac{3\sqrt{3}}{4}\ u.v$

5. أ/ بين أن النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;5),(B;1)\}$

ب/ عين طبيعة المجموعة (S) للنقط M من الفضاء بحيث $\|5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=6\|\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MC}\|$

ج/ ما هو الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (P) ؟

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $4x-9y=5$ ... ... (E)

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل لـ (E) فإن $x\equiv 8[9]$ ، ثم استنتج حلول لـ (E)

ب- α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث $x<35$ و $y\le 15$. عيـن القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري.

2. أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 9 .

ب – عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول (E) حيث يكون $2017^x+13^y+7\equiv 0[9]$

3. نعتبـر العددان الطبيعيان a و b حيث $a=9n+8$ و $b=4n+3$ وليكـن d قاسمهما المشترك الأكبر.

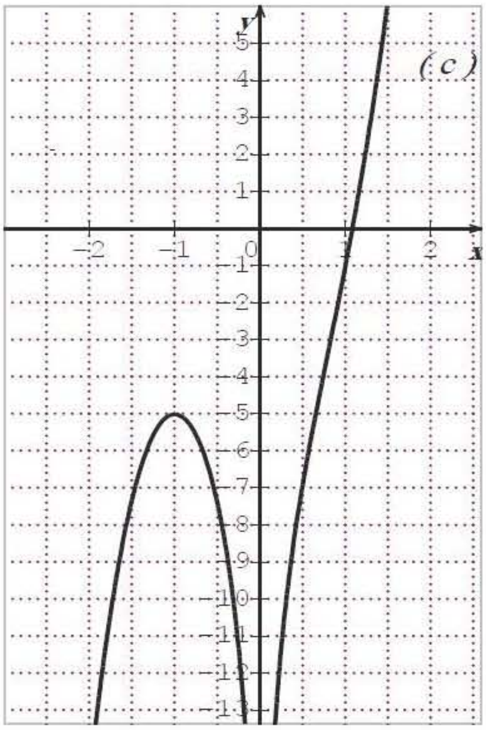
أ- ما هي القيم الممكنة لـ d ؟

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I. المنحنى المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x)=2x^3-3+6\ln|x|$

- بقراءة بيانية: شكل جدول تغيرات g .
- بيـن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال: $]1.07;1.09[$
- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$



II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=2x-3\frac{\ln|x|}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا.

2. أ- بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

ب- إستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f(x)$.

ج- بين أن: $f(\alpha)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. بيـن أن المستقيم (D) ذو المعادلة: $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4. أ- بين أنه يوجد مماس (Δ) لـ (C_f) يوازي المستقيم (D) و يمس (C_f) في نقطتين يطلب إعطاء معادلة لهذا المماس.

ب- أنشئ (Δ) ، (D) و (C_f) (تعطى $f(-0.75)=0$)

5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيـط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^2+3\ln|x|=0$.

6. لتكـن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\frac{a+b\ln|x|}{x}$.

أ- عيـن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\to\frac{\ln|x|}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P(Z)$ حيث:

$$P(Z) = Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i$$

- أحسب $P(i)$ ثم استنتج في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، حلول المعادلة $P(Z) = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $Z_A = i$ و $Z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ على الترتيب.

أ. علم النقطتين A و B . (يتمم الشكل في سياق التمرين)

ب. Z_C لاحقة النقطة C صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. بيــن أن: $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ج. أكتب Z_C و Z_B على الشكل الجبري.

3. أ- أكتب الأعداد $(1 - Z_A)$ و $(2Z_C)$ ثم $\left(\frac{2Z_C}{1-Z_A}\right)$ على الشكل الأسي.

ب-استنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{2Z_C}{1-Z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

4. أ- أحسب Z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A,2); (B,-1); (C,2)\}$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لواحقها Z حيث:

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\|.$$

جـ- أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D}$. ثم عيــن طبيعة الرباعي $OADC$.

5. لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. بيـــن أن: $Z_E = \sqrt{3}$

- عين نسبة، زاوية و مركز التشابه S الذي يحول O إلى C و A إلى B.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;0;-2)$ ، $B(3;0;1)$ ، و $C(1;0;1)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل النقطة B.

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بيحيث: $\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

- بين أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة C.

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (Δ).

4. أ- عين إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب- أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ثم استنتج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B;e^t);(C;1)\}$

أ- بين أن: $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

ت- استنتج أن مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0=-4$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{5}{2}n+2$

1. أ- أحسب U_1 و U_2 .
ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $U_n\geq 0$.
ج- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، $U_n\geq\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}$. ماهي نهاية المتتالية $U_n \geq$ ؟
2. نعتبر (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n=U_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان.
أ- عين α و β حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب- أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim U_n$.
ج- بوضع $\alpha=-5$ و $\beta=6$. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$
3. أ- نضع $W_n=8^n.V_n$ و $\acute{S_n}=W_0+W_1+\cdots+W_n$. بين أن: $\acute{S_n}=\frac{2}{3}(4^{n+1}-1)$
ب- تحقق أنه من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، $4^{2k}\equiv 1[5]$ ثم استنتج قيم العدد الطبيعي n حيث يكون $3\acute{S_n}$ قابلا للقسمة على 10.

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\ln(e^{2x}-e^x+\frac{1}{2})-2x$

1) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:
أ/ $e^{2x}-e^x=(e^x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ ب/ $g(x)=\ln(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x})$
2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3) أحسب $g(-ln2)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+\frac{1}{2})$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟
ب- استنتج أن (C_f) يقبل خط مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$، ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D).
2. أ) بين أن $\acute{f}(x)=(2e^x-1).e^{x-f(x)}$ حيث $\acute{f}$ مشتق الدالة f
ب) أدرس إشارة $\acute{f}(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
جـ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0
3. أ/ عين α فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
ب/ أرسم (Δ)،(D) و (C_f)
4. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني.
- عين قيمة β التي تحقق $h(x)=f(x-ln2)+\beta$، استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)
5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $e^x(e^x-1)-e^m+\frac{1}{2}=0$

III. - نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من صندوق يحتوي على 3 كريات مرقمة بالعدد a و 4 كريات مرقمة بالعدد $a-1$ مع $(a\in\mathbb{R})$. - أحسب احتمال الحصول على كريتين مرقمتين بنفس العدد.
- أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المسجلين عل الكريتين.
- عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوما.