ثانوية : عيسى زريمش (حمام دباغ) يوم : 2017 / 04/ 11

المستوى : الثالثة تقني رياضي المدة : ساعة

فرض الثلاثي الثالث في مادة الرياضيات

الأسئلة :

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$ من أجل $n \geq 2$ وَ $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$

1) أ* احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

ب* بين بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

2) أ* بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

ب* استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \dfrac{1}{n}$ وَ $0 \leq v_n \leq 1$

3) أ* بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

ب* استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n).

4) * بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ، نرمز بـ γ إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا نريد حساب γ).

* ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الهـــــدية:

1) أ* حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(z - 2 + 2i)(z^2 + 4z + 8) = 0$$

ب* أكتب الحلول على الشكل الأسي.

2) في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقطة A لاحقتها $2 - 2i$

** أكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه النقطة A وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

تصحيح الفرض للثلاثي الثالث – 3 تقني رياضي

المسألة: نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=u_{n-1}+\frac{1}{n} \end{cases}$ من أجل $n\ge 2$ وَ $v_n=u_n-\ln n$ من أجل $n\ge 1$

1) أ*حساب u_2 ، u_3 و u_4: $u_2=u_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$u_3=u_2+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ و $u_4=u_3+\frac{1}{4}=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$

ب *نبين بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$

1)من أجل $n=1$: $u_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}=1$ ، محققة

2)نفرض أن $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$ صحيحة من أجل n ونبرهن أن $u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

من 1) و 2)نستنتج حسب مبدأ الاستدلا ل بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$

2) أ* نبين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم k: $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$

لدينا $k\le x\le k+1$ أي $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{k}$ يكافئ $\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$

يكافئ $\left[\frac{1}{k+1}.x\right]_k^{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\left[\frac{1}{k}.x\right]_k^{k+1}$

يكافئ $\frac{k+1}{k+1}-\frac{k}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k}$

يكافئ $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$

ب* استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$: $u_n-1\le\ln n\le u_n-\frac{1}{n}$ وَ $0\le v_n\le 1$:

لدينا: $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$

من أجل $k=1$: $\frac{1}{2}\le\int_1^2\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{1}\dots\dots(1)$

من أجل $k=2$: $\frac{1}{3}\le\int_2^3\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{2}\dots\dots(2)$ و هكذا....حتى.......

$\dots\dots k=n-1$: $\frac{1}{n}\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n-1}\dots\dots(*)$

بالجمع طرف إلى طرف وحسب علاقة شال للتكامل نجد

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\le\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\dots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}$

ولديناا: $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$ أي $u_n-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$

$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$ أي $u_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n-1}$

أي أن : $u_n-1\le\int_1^n\frac{1}{x}dx\le u_n-\frac{1}{n}$ ومنه: $u_n-1\le\ln n\le u_n-\frac{1}{n}\dots(**)$ من

المتباينة $(**)$ نجد: $-1\le\ln n-u_n\le-\frac{1}{n}$ أي أن:

$0\le\frac{1}{n}\le u_n-\ln n\le 1$ ولدينا: $v_n=u_n-\ln n$ اذن: $0\le v_n\le 1$

3) أ* نبين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$

لدينا: $u_n=u_{n-1}+\frac{1}{n}$

أي ان : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}$

$v_{n+1}-v_n=u_{n-1}+\frac{1}{n}=u_{n+1}-\ln(n+1)-u_n+\ln(n)=u_{n+1}-u_n-\left[\ln(n+1)-\ln(n)\right]$

ومنه: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$

ب* استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لدينا: $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$ أي ان $\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$

وعليه : $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le 0$ ومنه: $v_{n+1}-v_n\le 0$

اذن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$

4) * نبين أن المتتالية (v_n) متقاربة:

بما ان (v_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فانها متقاربة

نرمز بـ γ إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا نريد حساب γ).

حساب نهاية المتتالية (u_n)

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(v_n+\ln(n)\right)=+\infty$

الهدية :

1) أ* نحل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E)...(z-2+2i)(z^2+4z+8)=0$$

(E) يكافئ $z-2+2i=0$ أو $(1)...z^2+4z+8=0$

$\Delta=-16$ ، بما ان $\Delta\neq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما : $z_1=-2-2i$ او $z_2=-2+2i$

(E) يكافئ $z=2-2i$ او $z=-2-2i$ أو $z=-2+2i$

ومنه: $S=\{-2-2i;-2+2i;2-2i\}$

<u>ب* كتابة الحلول على الشكل الأسي:</u>

$z_1=-2-2i$ ، $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_1=-2+2i$ ، $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_1=2-2i$ ، $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطة A لاحقتها $z_A=2-2i$

<u>*كتابة العبارة المركبة للدوران</u> R <u>الذي مركزه النقطة</u> A <u>وزاويته</u> $\frac{\pi}{2}$:

لدينا: $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)z_A$

ومنه: $z'=i.z+(1-i)(2-2i)=i.z-4i$