مديرية التربية لولاية تيسمسيلت	ثانوية: ابن خلدون – العيون

المستوى: 3 ت ر يوم 15 – 05 – 2017 المدة: 4 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي فـــي مادة: الرياضيات

المـــــــوضـــوع الاول

الـتمـريـن الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;1)$، $B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1. تحقق ان النقط A، B و C لاتعين مستويا وحيدا
2. (P_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، (m عدد حقيقي)

ا) بين ان (P_m) مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

ب) بين ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. ا) احسب احداثيات النقطة H المعرفة بـ: $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (e اساس اللوغارتم النيبيري)

ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

4. ا) اوجد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}.(1+e)$

ب) اوجد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S)

التمـريـن الـثـانـي(05):

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0 \;.....(I)$

- اكتب الحلول على الشكل المثلثي

2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط ،و التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$، $z_C=\overline{z_B}$ وليكن العدد المركب L حيث : $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$

ا) اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف

3. ا) بين انه يوجد دوران r مركزه B و يحول A الى C ، يطلب تعيين زاويته .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

4. ا) عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

ب) عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

التمـريـن الثـالـث(04):

1. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln x$. ادرس تغيرات الدالة f
2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$

احسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها

3. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

ا) اثبت ان : $v_n = n - n\ln(n)$

ب) باستعمال الدالة f ، ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 < u_n \leq e$

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين الرابع(07):

الجزء 1 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$حيث الوحدة 2cmعلى محور الفواصل و5cm على محور التراتيب

1. احسب نهاية الدالة f عند$-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

2. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

ب) احسب نهاية f عند$+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3. نعتبر على المجال$]-1;+\infty[$ الدالة g المعرفة بـ : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

ب) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(t)$ من اجل t موجب تماما

4. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب) استنتج ان f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) انشئ (C_f)

الجزء 2 :

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين ان : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f)والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = \ln 4$ ، $x = 0$

المستوى: 3 ت ر يوم 15 – 05 – 2017 المدة: 4 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول(3.5):

نعتبر المعادلة $(E): 3x - 8y = 5$ حيث x وy صحيحان نسبيان

1) اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث $x = 8k - 1$، $y = 3k - 1$ و $k \in \mathbb{Z}$

2) ا) لتكن n، x وy ثلاثة اعداد صحيحة تحقق $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ اثبت ان $(x; y)$ حل للمعادلة (E)

ب) نعتبر الجملة $(S)\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح . اثبت ان n حل للجملة (S) اذا وفقط اذا كان $n \equiv 23[24]$

3) تأكد ان 2015 حل للجملة (S) ثم استنتج ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24

التمرين الثاني(4.5):

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس نعتبر النقط $A(-2; -1; 3)$، $B(1; 3; 5)$، $C\left(2; -\frac{1}{2}; -4\right)$ و $D(2; -2; -3)$، $E(1; -1; 2)$، $F(1; -1; 1)$ والمستقيم (Δ) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $t \in]0; +\infty[$; $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases}$

1. ا) بين ان النقط A، B، C تعين مستويا (ABC)

ب) تحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له

2. ا) اوجد $\vec{u}$ احدا اشعة توجيه المستقيم واحداثيات نقطة منه (Δ)

ب) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من المستقيم (Δ) اوجد EM^2 بدلالة t

ج) اوجد اصغر قيمة EM^2 ثم استنتج المسافة بين النقطة E والمستقيم (Δ) و استنتج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ)

د) اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس المستقيم (Δ)

3. ا) بين ان المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثالث(05):

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

1. ا) احسب العدد المركب $\left(\sqrt{3} + i\right)^2$ ثم استنتج في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلتين : $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ و $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

ب) تحقق انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z) = \left(z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i\right)$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللاحقات $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=-1+\sqrt{3}i$، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$ على الترتيب

ا) اكتب الاعداد المركبة A، B، C و D على الشكل الاسي .

ب) علم النقط A، B، C و D ثم بين انها تنتمي الى الدائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

ج) بين ان: $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}=i$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث ABD

3. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة $'$ حيث $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

ب) تحقق ان $T(A)=B$، $T(B)=C$ و $T(C)=D$

ج) بين انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z')=P(z)$

د) احسب $P(z_A)$ ثم استنتج مرة اخرى حلول المعادلة $P(z)=0$

التمرين الرابع(07):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2+1) & ;x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

I. .

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا

3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $\alpha\geq 0$: $f(\alpha)=0$ ، ثم تحقق ان : $4.6<\alpha<4.7$

5. اكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1

II. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

1. احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g' واستنتج اشارتها على المجال $]0;+\infty[$

2. حدد اتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

3. انشئ (D) و (C_f)

III. .

1. من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\, dx$

- احسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (D) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

التنقيط	التصحيــــح المفصل

التمرين 01 :

1. التحقق ان النقط A، B و C لاتعين مستويا وحيدا :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

بما ان : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقط A، B و C على استقامة واحدة ومنه النقط A، B و C تعين ملا نهاية من المستويات وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث

0.5

2. $P(m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق :
$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، m عدد حقيقي

ا) نبين ان $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m :

لدينا من اجل كل m من $\mathbb{R}$ الثلاثية $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$ ومنه $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

0.5

ب) نبين ان جميع المستويات $P(m)$ تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له :

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ يكافئ

$(-y+2z+4)+m(x-z+1)=0$

يكافئ $(-y+2z+4)=0$ و $(x-z+1)=0$

منه (Δ) معرف بالجملة: $\begin{cases}x-z+1=0\\-y+2z+4=0\end{cases}$ اي ان $\begin{cases}x=-1+z\\y=4+2z\end{cases}$ بوضع $z=t$ ، t عدد حقيقي

ومنه التمثيل الوسيطي لـ(Δ) هو: $\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t\\z=t\end{cases};\quad t\in\mathbb{R}$

0.75

3. ا) حساب احداثيات النقطة H حيث :

$2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

بما ان : $2-1+e\neq0$ فان النقطة H موجودة ووحيدة هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;e)\}$

$\begin{cases}x_H=\frac{2x_A-x_B+ex_C}{2-1+e}=0\\y_H=\frac{2y_A-y_B+ey_C}{2-1+e}=1\\z_H=\frac{2z_A-z_B+ez_C}{2-1+e}=1\end{cases}$ ومنه $H=C(0;1;1)$

0.5

ب) المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ): لتكن النقطة H' المسقط العمودي (Δ)، $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيهه ، $\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}x_{H'}\\y_{H'}-1\\z_{H'}-1\end{pmatrix}$

معناه $\begin{cases}\overrightarrow{HH'}.\vec{u}=0\\H'\in(\Delta)\end{cases}$

0.5

: $\begin{cases}x_{H'}+2y_{H'}+z_{H'}-3=0\\x_{H'}=-1+t\\y_{H'}=4+2t\quad;(t\in\mathbb{R})\\z_{H'}=t\end{cases}$ معناه: $t=-\frac{2}{3}$

ومنه $H'\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$d(H;(\Delta))=HH'=\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ا) ايجاد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}(1+e)$

معناه $\|(2-1+e)\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}(1+e)$ معناه :

$\|\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}$ ومنه (S) سطح كرة مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{5}$

0.5

ب) ايجاد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S)

المستويات (P_m) تمس المجموعة (S) معناه :

$d(H;(P_m))=\sqrt{5}$

$d(H;(P_m))=\frac{|mx_H-y_H+(2-m)z_H+m+4|}{\sqrt{m^2+1+(2-m)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}$

$\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\sqrt{5}$ معناه: $\sqrt{5}\sqrt{2m^2-4m+5}=5$

معناه: $m^2-2m=0$ معناه $m=0$ او $m=2$ ومنه :

$(P_0):-y+2z+4=0$ او $(P_2):2x-y+6=0$

0.75

التمرين 02 :

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=-4$ ومنه $z_1=\sqrt{3}-i$ او $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه

$S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

0.5

كتابة الحلول على الشكل المثلثي :

$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ،

$z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

0.5

2) كتابة العدد L على الشكل الاسي ثم حساب L^{2016}

لدينا : $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$، $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$،

$1-i=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ ومنه: $L=\frac{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

0.5

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i168\pi}$

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}$

0.5

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف :

لدينا : $L=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$، $L^n=\sqrt{2}^n e^{i(n\frac{\pi}{12})}$

L^n عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه

$n=12k+6$ ، $k\in\mathbb{N}$

0.5

1) ا) نبين انه يوجد دوران r مركزه النقطة B ويحول A الى C يطلب تعيين زاويته : **0.5**

ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث a،b عددان مركبان

لدينا معناه $\begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases}$ ومنه : $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$b = z_B(1-a) = 2\sqrt{3}$

ومنه : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3}$: بما ان **0.5**

$|a| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

فان r هو دوران مركزه B وزاويته $arg(a) = \frac{2\pi}{3}$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته **0.5**

لدينا : $AB = BC$ و $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ اذن

المثلث ABC متقايس الاضلاع

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'} = \frac{z_B + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ **0.5**

$[BB']$ ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق بـ : $[AC]$ في

المثلث ABC المتقايس الضلعين مساحته $S = \frac{BB' \times AC}{2}$

$AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$ ، $BB' = |z_{B'} - z_B| = 1$

ومنه : $S = \sqrt{3}ua$

1) ا) تعيين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

العدد $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i}$ حقيقي موجب : لدينا $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i} = \frac{z - z_C}{z - z_A}$ **0.75**

$\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i}$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

ومنه $arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MC}) = 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ و (E_1) هي

المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$

ب) تعيين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون **0.75**

$iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

لدينا : $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ اي $iz = i(i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta})$

اي ان : $z = \sqrt{3} + i + 2e^{i\theta}$

$z = z_B + 2e^{i\theta}$ ، θ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه : (E_2) هي دائرة مركزها النقطة B ونصف قطرها 2

التمرين 03 :

1) دراسة تغيرات الدالة f **0. 5**

$f'(x) = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

0.5

احسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه **0.5**

1) $u_1 = e \approx 2.71$ ، $u_2 = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$

$u_3 = \frac{e^3}{27} \approx 0.74$ ، $u_4 = \frac{e^4}{256} \approx 0.21$ **0.25**

$u_5 = \frac{e^5}{3125} \approx 0.05$ ، متناقصة ونهايتها 0 **0.25**

ا) اثبات ان : $v_n = n - n\ln(n)$

1) ا) $v_n = \ln n = n - n\ln n$ **0.5**

ب) ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة:

$v_n = f(n)$ والدالة f متناقصة على المجال $[1; +\infty[$ **0.5**

وبالتالي (v_n) متناقصة وبما ان $u_n = e^{v_n}$ والدالة الاسية

متزايدة فان اتجاه تغير (u_n) هو اتجاه تغير (v_n) اي (u_n) **0.25**

متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$0 < u_n \le e$

بما ان (u_n) متناقصة فان $u_n \le u_0 = e$ ولدينا **0.5**

$e^n > 0$ و $n^n > 0$ وبالتالي $u_n > 0$ اي $0 < u_n \le e$

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

(u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة . **0.25**

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ اي

$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ **0.5**

التمرين 04 :

الجزء 1 : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\right]$ بوضع

$t = e^x$ نجد : $\lim_{t\to0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1$ ومنه **0.25**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 1$ **0.25**

بجوار $-\infty$

3) ا) لدينا من اجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = e^{-x}[\ln e^x + \ln(e^{-x}+1)]$ ومنه **0.5**

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

ب) حساب نهاية f عند $+\infty$ وتفسيرها هندسيا :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لان

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})\right] = 0$ **0.25**

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$

بجوار $+\infty$ **0.25**

4) $g(x) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ ، $D_g =]-1; +\infty[$

ا) دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

من اجل كل عدد حقيقي t من $[0; +\infty[$ ولدينا : **0.25**

$g'(x) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$

عبـــد الله علي

تغيرها ونهايتها 0.5

نلاحظ انه من اجل كل عدد حقيقي t من $[0;+\infty[$: $g'(x) < 0$

جدول التغيرات : 0.5

t	0	$+\infty$
g'(t)		−
g(t)	0	$\searrow$ $-\infty$

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما t ان : $g(t) < 0$ 0.75

1) ا) حساب $f'(x)$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x} \times e^{-x}$$ 0.5

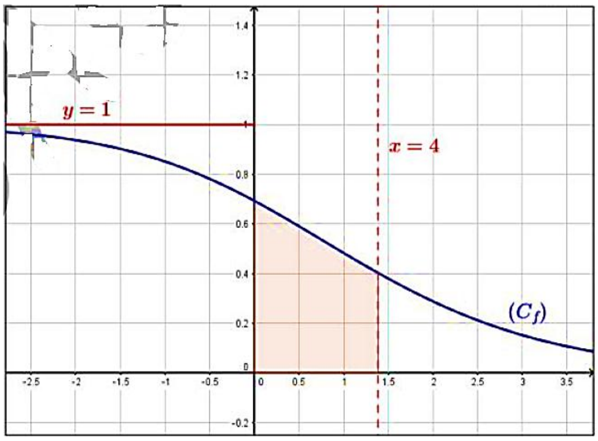
ومنه بعد التبسيط نجد : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x نضع $t = e^x$ نجد $\frac{g(t)}{t} < 0$ ومنه نجد $\frac{g(e^x)}{e^x} < 0$ اي $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على مجموعة تعريفها

جدول التغيرات : 0.5

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		−
f(x)	1	$\searrow$ 0

ج) انشاء (C_f) : (انظر في اخر الصفحة)



0.5

الجزء 2: $\int_0^x f(t)dt$ 0.5

1) لدينا من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2) حساب التكامل بالتجزئة :

نضع : $\begin{cases} u(t) = \ln(1+e^t) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ و $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ ومنه : 0.75

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \times \frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^t) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt$$

$$= -f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2\ln 2$$

3) حساب المساحة : 0.75

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \left[-f(x) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + 2\ln 2\right]_0^{\ln 4}$$

بعد الحساب نجد :

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \frac{-25\ln 5}{2} + 10\ln 2\ cm^2$$

التصحيـــح المفصل	التنقيط
التمرين 01 :	
1. اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x=8k-1$، $y=3k-1$ و $k\epsilon\mathbb{Z}$	
ومنه : $3(x+1)=8(y+1)$	
3 يقسم الجداء $8(y+1)$ واولي مع فهو يقسم $y+1$	0.5
يعني $y=3k-1$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$ وبتعويض في نجد $x=8k-1$	
$\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ يستلزم $3x+2=8y+7$ يعني	0.5
$3x-8y=5$ ومنه $(x;\ )$ حل للمعادلة (E)	
2. ا) اثبات ان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) :	
$\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$	0.75
ب) اثبت ان n حل للجملة (S) اذا وفقط اذا كان $n\equiv 23[24]$	
$(x;y)$ حل للمعادلة (E) حسب السؤال 2 ا) ومنه	
$x=8k-1$ و $y=3k-1$ اذن	
$n=3x+2=24k-1$ يعني : $n\equiv -1[24]$ ومنه	0.75
$n\equiv 23[24]$	
نفرض ان يعني ومنه $\begin{cases} n-2=24k+21 \\ n-7=24k+16 \end{cases}$ ومنه	0.75
$\begin{cases} n-2=3(7k+8) \\ n-7=8(8k+7) \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$	
3. ا) تأكد ان 2015 حل للجملة (S):	
لدينا $2015=3\times 671+2$ يعني $2015\equiv 2[3]$ و	0.5
يعني $2015=8\times 251+7$ يعني ان $2015\equiv 7[8]$	
اذن $2015\equiv 23[24]$ اذن $2015^{1436}\equiv (-1)^{1436}[24]$	
$2015^{1436}\equiv 1[24]$ اخيرا $2015^{1436}-1\equiv 0[24]$	0.5
يعني ان $2015^{1436}-1$ يقبل القسمة على 24	
التمرين 02 :	
1. ا) اثبات ان النقط A، B، C تعين مستويا (ABC) لدينا	0.5
: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ بما ان $8\neq\frac{3}{4}$ فان النقط A، B، C تعين مستويا	
ب) التحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) نحسب	
$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=6-8+2=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=8-7-1=0$	
اذن محققة	0.5

التصحيـــح المفصل	التنقيط
تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي :	0.5
$2x-2y+z=1$	
1) ا) ايجاد $\vec{u}$ احد اشعة توجيه المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي	
هو $t\epsilon]0;+\infty[$; $\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ x=-\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z=-1+\ln(e^2t) \end{cases}$ يكافئ	0.75
$t\epsilon]0;+\infty[$; $\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ y=-1+\ln(t) \\ z=1+\ln(t) \end{cases}$ بوضع	
نجد $k\epsilon\mathbb{R}$; $\begin{cases} x=1-k \\ y=-1+k \\ z=1+k \end{cases}$ ومنه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
نقطة من (Δ) هي $L(1;-1;1)$	
ب) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) ايجاد	
EM^2 بدلالة t	
$EM^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$ ومنه	0.5
$EM^2=(\ln(t))^2+(\ln(t))^2+(\ln(t)-1)^2$ اي	
$EM^2=3(\ln(t))^2-2\ln(t)+1$	
ج) ايجاد اصغر قيمة EM^2 نضع $EM^2=f(t)$ وندرس اتجاه	
تغير الدالة f نجد ان $f'(t)=\frac{2(3\ln(t)-1)}{t}$ تنعدم f' عند	0.25
$t=e^{\frac{1}{3}}$ وسالبة على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومنه f متناقصة على المجال	
$\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومتزايدة على المجال $\left]e^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$ اذن اصغر قيمة تصلها	
EM^2 عندما $t=e^{\frac{1}{3}}$ اي $EM^2=\frac{2}{3}$ ومنه المسافة بين النقطة E	
والمستقيم (Δ) هي $\frac{2}{3}$	
د) استنتاج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم	
(Δ) نعوض في التمثيل الوسيطي $t=e^{\frac{1}{3}}$ هي $H\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$	0.25
و) كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس	
المستقيم (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث	0.5
$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+\frac{16}{3}=0$ يكافئ	
$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{2}{3}$	
2) ا) تبيين ان المثلث ABC قائم في A لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه	0.25
محققة	
حساب مساحة المثلث ABC : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{87}{4}$	0.5
ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ نحسب	
$d(D;(ABC))=\frac{4}{3}$ ومنه الحجم	0.5
$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}.d=\frac{87}{9}$	

التمرين 03:

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$ — 0.25

$(\sqrt{3}+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$

استنتاج: $z^2 = 2+2\sqrt{3}i$ معناه: $z^2 = (\sqrt{3}+i)^2$ معناه: — 0.5

$z = \sqrt{3}+i$ او $z = -\sqrt{3}-i$

$z^2 = -2-2\sqrt{3}i$ معناه: $z^2 = \left(i(\sqrt{3}+i)\right)^2$

معناه $z = -1+\sqrt{3}i$ او $z = 1-\sqrt{3}i$

$S = \{-\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 1-\sqrt{3}i; -1+\sqrt{3}i\}$

ب) التحقق: $P(z) = (z^2+2+2\sqrt{3}i)(z^2-2-2\sqrt{3}i)$

$= z^4+8-8\sqrt{3}i$ — 0.25

2. ا) اكتب الاعداد المركبة A، B، C و D على الشكل الاسي

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$، $z_C = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ — 0.5

$z_D = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$،

ب) تعليم النقط: — 0.5

$OA = OB = OC = OD = 2$ ونصف قطر الدائرة هو 2 — 0.5

ج) $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ و $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A} = \frac{z_A-z_D}{z_A-z_B} = \frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ ، — 0.25

التفسير: $AD = AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين — 0.75

3. $T: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة — 0.5

T دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) التحقيق: $T(A) = B$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = z_B$

$T(B) = C$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_C$

$T(C) = D$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$ — 0.5

ج) $P(z') = P\left(e^{i\frac{\pi}{2}}z\right) = (iz)^4+8-8\sqrt{3}i = P(z)$ — 0.25

د) $P(z_A) = 0$ — 0.25

لدينا: $P(z_A) = P(z_B)$ ومنه $P(z_B) = 0$

$P(z_B) = P(z_C)$ ومنه $P(z_C) = 0$

$P(z_C) = P(z_D)$ ومنه $P(z_D) = 0$ — 0.25

اذا حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$S = \{-\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 1-\sqrt{3}i; -1+\sqrt{3}i\}$

التمرين 04:

1. لدينا $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2+1\ ;x>0)$ و

$f(0) = 1$ — 0.25

2. حساب نهاية f عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ — 0.25

3. دراسة قابلية اشتقاق f عند 0

من الواضح ان f غير قابلة للاشتقاق عند لانها ليست نعرفة على يسار 0 — 0.5

لندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0:

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1-1}{x} = 0$

ومنه قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f

حساب المشتق: الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ — 0.5

حيث: $f'(x) = x(3-2\ln x)-x$ ومنه

$f'(x) = 2x(1-\ln x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(1-\ln x)$ لان $2x>0$

$f'(x) \geq 0$ يكافئ $(1-\ln x) \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 1$

اي $x \leq e$ اي $x \epsilon]0;e]$ اذن:

$x\epsilon]0;e]$ يكافئ $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ونستنتج $x\epsilon[e;+\infty[$ يكافئ $f'(x) \leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f: — 0.5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2+1$	$\searrow$	$-\infty$

1) تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث: $\alpha \geq 0$

و$f(\alpha) = 0$ من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ ومستمرة على هذا المجال ولدينا: — 0.5

و$f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[e;+\infty[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

التحقق ان: $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$ لدينا و $f(4.7) \times$

$f(4.6) < 0$ ومنه $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$

2) كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(D): y = f'(x)(x-1)+f(1)$ ومنه:

$(D): y = 2x+\frac{1}{2}$ — 0.5

I. لدينا $g(x) = f(x)-2x-\frac{1}{2}$

حساب $g'(x)$ و$g''(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث

$g'(x) = f'(x)-2$: اي $g'(x) = 2x(1-\ln x)$ — 0.5

الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$g''(x) = 2(1-\ln x)+2x\left(-\frac{1}{x}\right)$ اي

$g''(x) = -2\ln x$

<u>دراسة اتجاه تغير g'</u>

0.5 $g''(x) \geq 0$ يكافئ $-2\ln x \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 0$ يكافئ $0 < x \leq 1$ اذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x) < 0$ يكافئ $-2\ln x < 0$ يكافئ $\ln x > 0$ يكافئ $x > 1$ اذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

0.25 <u>جدول تغيرات الدالة g'</u> :

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	-2 ↗	0	↘ $-\infty$

0.25 <u>اشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$</u>:

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من اجل كل عدد حقيقي x:

0.25 $g'(x) \leq 0$

4. تحديد اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1 . 0 $g'(x) \leq 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

<u>جدول تغيرات الدالة g</u> :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

0.5

من جدول تغيرات الدالة g نجد: $g(x) \geq 0$ من اجل $x\in]0;1]$ ، $g(x) \leq 0$ من اجل $x\in[1;+\infty[$

<u>استنتاج وضعية (C_f)</u> بالنسبة الى (D) يعود الى دراسة اشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ اي اشارة $g(x)$

0.5

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

5. انشاء (C_f) و (D) :

6. 1) <u>حساب بدلالة باستعمال المكاملة بالتجزئة</u> :

لدينا : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

0.75 نضع : $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

اذن : $I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$

ومنه بعد التبسيط نجد : $I_n = \frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3} + \ln n\right) - \frac{1}{9}$

2) <u>استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$</u>:

بما ان $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ اي $0 < x < 1$ فان

$f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$

حسب السؤال 2 من الجزء II اي من اجل $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ فان

وبالتالي : $f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$

0.75 ولدينا : $A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right) dx$

$f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x$

ومنه : $A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$ بعد التبسيط نجد :

$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) + \frac{1}{9}\right) \times 4cm^2$

حساب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0$ ومنه نجد :

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \frac{4}{9}$

0.75