



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10 ثم استنتج باقي قسمة A_n على 10 حيث

$$A_n = 1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018$$

(2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $[10]3^{2n}(3n+1) \equiv 2017^{2n+1} + 1439^n(3n+4) \pmod{10}$ ثم استنتج قيم العدد

الطبيعي n التي يكون من أجلها $2017^{2n+1} + 1439^n(3n+4)$ مضاعف للعدد 10 .

(3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\alpha 0 \alpha \alpha 02}$ في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{\beta 612}$ في نظام التعداد ذي

الأساس 7 أوجد العددين α ; β ثم أكتب N في النظام العشري .

(4) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .

أ - أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017 .

ب - X المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليهما

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

(1) أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على IN ثم استنتج أنها متقاربة معيماً نهايتها .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب - أكتب بدلالة n كلا من u_n ; v_n ثم أحسب $\lim u_n$.

ج - أحسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ و

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n) \quad \text{و} \quad T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$$

التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط $A; B; C; D$ التي لواحقها على الترتيب

$$z_D = e^{\frac{3\pi}{4}i}; \quad z_C = i\sqrt{2}; \quad z_B = \overline{z_A}; \quad z_A = 1+i$$

و لتكن النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D .

(1) بين أن لاحقة النقطة L تساوي $\sqrt{2}$.

(2) أثبت أن النقط $A; B; C; L$ تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(3) نعتبر النقطة K ذات اللاحقة $z_K = -z_B$ و الدوران ذات المركز O و يحول C إلى K .

عين قيس زاوية الدوران R ثم عين لاحقة النقطة L' صورة L بالدوران R محدداً طبيعة الرباعي $ABL'K$.

(4) نعتبر التحويل النقطي T المعروف بـ: $T = R \circ h$ حيث h هو التحاكي الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه O . حدد طبيعة التحويل T ثم عين عناصره المميزة.

(5) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z و التي تحقق: $|z - z_A| = |\overline{z} - 2z_D|$ حيث $\overline{z}$ مرافق z .

التمرين الرابع (7 نقاط)

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $] -1; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$.

أ - أدرس تغيرات الدالة g على $] -1; +\infty[$.

ب-بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين إحداها معدوم و الآخر α حيث $-0,72 < \alpha < -0,71$

ج-استنتج إشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $] -1,0 [\cup] 0; +\infty [$ بـ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول هي 2 cm .

(1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنى (C_f) نضع $\alpha \approx -0,715$ و $f(\alpha) \approx -2,46$.

(4) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماماً نضع $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(t)dt$

أ - أعط تفسيراً هندسياً للعدد $I(\lambda)$ حسب قيم العدد الحقيقي λ

ب - بملاحظة أنه من أجل كل x عدد حقيقي من $]1; +\infty[$: $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$

أحسب $I(\lambda)$ باستعمال التكامل بالتجزئة ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

- (1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3u_n - 2^n$.
برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 0$ ثم أستنتج أن (u_n) متناقصة .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = 2^n - u_n$.
أ - بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
ب - عبر عن كلا من u_n و v_n بدلالة n .
- (3) أ - أحسب $\lim u_n$ ماذا تستنتج ؟
ب - أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- (4) أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5 و بواقي قسمة 3^n على 4
ب - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2018 + 1962^{2^n} + 1439^n \equiv 0[5]$

التمرين الثاني (5 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و نعتبر النقط $E; D; C; B; A$ التي لواحقها على الترتيب $z_E = -2i$ و $z_D = -1+i$ و $z_C = 3i$ و $z_B = 4+i$ و $z_A = 1$.
- (1) بين أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$ ثم استنتج أنه يوجد تحويل قطبي T يحول D إلى E و يحول B إلى C يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .
 - (2) عين لاحقة النقطة C' صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - (3) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z صورتها M' ذات اللاحقة z' بالتشابه S .
بين أن $z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1-i]$.
 - (4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $z = (1+i)(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
أ - عين طبيعة مجموعة النقط (Γ) لما θ يسمح المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
ب - اوجد طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S .
 - (5) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi[2\pi]$ عين طبيعة مجموعة النقط (γ) .

التمرين الثالث (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ والمستويان $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$ و $(P_2): x + y - 2z = 0$.

- (1) بين المستويان (P_1) و (P_2) . متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و شعاع توجيهه $\vec{v}(1; 1; 1)$.
- (2) أثبت أن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) .

$$(3) \text{ ليكن } (Q) \text{ المستوي المعروف بتمثيله الوسيطى التالى } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases}$$

- أ- بين أن (Q) و (P_1) متوازيان
- ب- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $3x + 2y - 5z = 58$.
- ج- تحقق أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) ثم أستنتج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
- (4) أ- بين أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي سطح كرة يطلب تعيين عناصره المميزة.
- ب- عين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع (S) والمستوي (Q) .

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ ثم بين أن f دالة فردية.
- (2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$(3) \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \text{ ثم شكل جدول تغيرات الدالة } f \text{ على } \mathbb{R}^+$$

$$(4) \text{ أستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب } x : 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$$

$$(5) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right] \text{ ثم فسر النتيجة هندسياً}$$

$$(6) \text{ أنشئ المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ و المنحنى } (C_f).$$

$$(7) \text{ أ- بين أن الدالة } x \mapsto \ln(e^{-x} + 1) \text{ دالة أصلية للدالة } x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1} \text{ على } \mathbb{R}$$

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 0$; $x = 1$

اتهى الموضوع الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

(5) أدراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10 لدينا $3^0 \equiv 1[10]$

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	[10]

باقي قسمة 3^n على 10

لما $n = 4k$ هو 1

و لما $n = 4k+1$ هو 3

و لما $n = 4k+2$ هو 9

و لما $n = 4k+3$ هو 7

استنتاج باقي قسمة A_n على 10 : لدينا $1993 \equiv 3[10]$ و منه $1993^{16n+6} \equiv 3^{16n+6}[10]$ يعني أن

$$1993^{16n+6} \equiv 9[10] \text{ من ما سبق نجد أن } 1993^{16n+6} \equiv 3^{4(4n+1)+2}[10]$$

$$\text{و لدينا } 1439 \equiv -1[10] \text{ و منه } 1439^{2n+3} \equiv -1[10] \text{ إذن } -2 \times 1439^{2n+3} \equiv 2[10]$$

$$\text{و } 2018 \equiv 8[10]$$

$$\text{بالجمع نجد } 1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018 \equiv 9 + 2 + 8[10]$$

باقي قسمة A_n على 10 هو 9

(6) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$

لدينا $1439 \equiv 9[10]$ أي أن $1439 \equiv 3^2[10]$ بالرفع إلى قوى n نجد $1439^n \equiv 3^{2n}[10]$ بالضرب في $3n+4$

$$\text{نجد (1) } (3n+4) \times 1439^n \equiv 3^{2n}(3n+4)[10] \dots\dots\dots$$

$$\text{و لدينا } 2017 \equiv -3[10] \text{ بالرفع إلى قوى } 2n+1 \text{ نجد (2) } 2017^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10] \dots\dots\dots$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } (3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+4) - 3^{2n} \times 3[10]$$

$$(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$$

استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10 :

يعني أن $(3n+4) \times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 0[10]$ مما سبق نجد أنه يعني أن $3^{2n}(3n+1) \equiv 0[10]$ بما أن 3

و 10 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوس $3^{2n}(3n+1) \equiv 0[10]$ يكافئ $(3n+1) \equiv 0[10]$ يكافئ

$$3n \equiv -1[10] \text{ بالضرب في 3 نجد } 9n \equiv -3[10] \text{ و } 9 \equiv -1[10] \text{ إذن } -n \equiv -3[10] \text{ بالضرب في } -1$$

$$\text{نجد } n \equiv 3[10] \text{ أي أن } n = 3 + 10k \text{ و } k \text{ عدد طبيعي } \dots\dots$$

(7) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\alpha0\alpha\alpha02}$ في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{\beta612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

ننشر N في النظامين ثلاثة و سبعة نجد

$$N = 2 + 1008\alpha \text{ منه } N = 2 + 9\alpha + 27\alpha + 243\alpha + 729\alpha$$

$$N = 303 + 343\beta \text{ منه } N = 2 + 7 \times 1 + 49 \times 6 + 343 \times \beta$$

$$343\beta = 1008\alpha - 301 \text{ أي أن } 2 + 1008\alpha = 303 + 343\beta \text{ و منه } \alpha \text{ عدد طبيعي أصغر تماماً من 3}$$

$$\text{لما } \alpha = 1 \text{ نجد أن } 343\beta = 1008 - 301 \text{ أي أن } \beta = \frac{707}{343} \text{ مرفوض}$$

$$\text{لما } \alpha = 2 \text{ نجد أن } 343\beta = 2016 - 301 \text{ أي أن } \beta = 5 \text{ مقبول و منه } N = 2018$$

(8) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .
ت - حساب احتمال الحادثة A "الحصول على رقمين مجموعها يساوي مجموع أرقام العدد 2017"

+	1	3	7	9
1				
3	4			
7	8	10		
9	10	12	16	

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ث - المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليهما قيمه هي 4 و 8 و 10 و 12 و 16 .
قانون الاحتمال

x_i	4	8	10	12	16
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{حساب أمل الرياضياتي : } E(X) = 4\left(\frac{1}{6}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{2}{6}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) \text{ و منه } E(X) = 10$$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

$$(4) \text{ حساب الحدود } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3 : u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{5} \text{ و } u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{3}$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{2}$$

البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$: لدينا $u_0 > 1$ محققة لان $3 > 1$

نفرض أن $u_n > 1$ و لنبرهن أن $u_{n+1} > 1$

$u_n > 1$ بالتربيع نجد $u_n^2 > 1$ بإضافة 1 نجد $1 + u_n^2 > 2$ بالقسمة على 2 نجد $\frac{1+u_n^2}{2} > 1$ بالجذر نجد $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$ و منه نجد $u_{n+1} > 1$ محققة

و منه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$.

(5) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN : لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1 - u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{(1+u_n)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

متناقصة . (u_n)

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

و لتكن نهايتها هي l : $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$ يعني أن $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ يكافئ $l^2 = 1$ و منه $l = 1$

(6) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

ت-إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n$$

$v_0 = u_0^2 - 1 = 8$

ث-الكتابة بدلالة n كلا من u_n ; v_n : $v_n = v_0 \cdot q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$ و لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ و منه

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-3}} + 1} \quad \text{و} \quad u_n = \sqrt{v_n + 1}$$

حساب النهاية $\lim u_n = 1$.

ج-حساب بدلالة n كلا من المجاميع التالية :

• لدينا

$u_n^2 = 1 + v_n$ و $v_n = u_n^2 - 1$ و منه $S_n = (1 + v_0) + (1 + v_1) + (1 + v_2) + \dots + (1 + v_n)$ أي أن

$$S_n = (n+1) + 16 \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \text{ و منه } S_n = (n+1) + v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

• حساب المجموع T_n لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ و منه $w_n = 2^n v_n = 2^3 = 8$ إذن (w_n) متتالية ثابتة إذن

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n \text{ أي } T_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \text{ و منه } T_n = 8(n+1)$$

• حساب المجموع L_n لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ و منه $k_n = \ln(v_n) = (3-n)\ln(2)$ إذن (k_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(2)$

و منه $L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$ أي أن $L_n = k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_n$ و منه

$$L_n = \frac{n+1}{2} [3\ln(2) + (3-n)\ln(2)] \text{ إذن } L_n = \frac{n+1}{2} [k_0 + k_n]$$

$$\text{و منه } L_n = \frac{(n+1)(6-n)\ln(2)}{2}$$

التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط $A; B; C; D$ التي لواحقتها على الترتيب

$$z_A = 1+i; \quad z_B = \overline{z_A}; \quad z_C = i\sqrt{2}; \quad z_D = e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

و لتكن النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D .

(6) إثبات أن لاحقة النقطة L تساوي $-\sqrt{2}$: لدينا النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D يعني أن $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{DC}$ يعني

$$\text{أن } z_D - z_L = z_C - z_D \text{ و منه } z_L = 2z_D + z_C \text{ أي } z_L = 2e^{\frac{3\pi}{4}i} + i\sqrt{2}$$

$$\text{يكافئ } z_L = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i\sqrt{2} = -\sqrt{2} \text{ و هو المطلوب.}$$

(7) إثبات أن النقط $A; B; C; L$ تنتمي إلى نفس الدائرة (C) بما أن

$$|z_A| = \sqrt{2}; \quad |z_B| = \sqrt{2}; \quad |z_C| = \sqrt{2}; \quad |z_L| = \sqrt{2} \text{ فإن النقط تنتمي إلى الدائرة } (C) \text{ ذات المركز } O \text{ و نصف القطر } \sqrt{2}.$$

(8) نعتبر النقطة K ذات اللاحقة $z_K = -z_B$ و R الدوران ذات المركز O و يحول C إلى K أي أن

$$R(O) = O ; R(C) = K \text{ يعني أن زاوية الدوران هي } \arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right) \text{ لدينا}$$

$$\arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ منه } \left(\frac{z_K}{z_C}\right) = \left(\frac{-z_B}{z_C}\right) = \left(\frac{-1+i}{i\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تعيين لاحقة النقطة L' صورة L بالدوران R : العبارة المركبة هي $z' = e^{\frac{\pi}{4}i} z$ و منه $z_{L'} = e^{\frac{\pi}{4}i} z_L$ أي أن

$$z_{L'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{2}) \text{ و } z_{L'} = -1 - i \text{ منه}$$

طبيعة الرباعي $ABL'K$: لدينا $z_{L'} = -z_A$; $z_K = -z_B$ و منه $|z_K - z_B| = |z_{L'} - z_A| = 2|z_A| = 2\sqrt{2}$ إذن قطرا الرباعي متقايسان و

$$\arg\left(\frac{z_A - z_{L'}}{z_B - z_K}\right) = \arg\left(\frac{2z_A}{2z_B}\right) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = 2\arg(z_A) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

هو مربع قطراه متقايسان و متعامدان

(9) نعتبر التحويل النقطي T المعروف بـ : $T = R \circ h$ حيث h هو التحاكي الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه O لدينا

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}z \\ z' = e^{\frac{\pi}{4}i} z_1 \end{cases} \text{ أي أن } \underbrace{z \xrightarrow{h} z_1 \xrightarrow{R} z'}_T$$

مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

(10) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z - z_A| = |\bar{z} - 2z_D|$ يعني أن

$$|z - z_A| = |z - 2\bar{z}_D| \text{ يعني أن } MA = MN \text{ حيث } N \text{ النقطة ذات اللاحقة } 2\bar{z}_D \text{ و منه مجموعة النقط } (\Gamma) \text{ هي محور القطعة المستقيمة } [AN] .$$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

III - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $] -1; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$.

ب - دراسة تغيرات الدالة g على $] -1; +\infty[$.

$$\text{النهايات : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2(1+x)\ln(1+x)}{1+x} \text{ و منه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1+x} = -\infty \text{ أي أن } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

لان $\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)\ln(1+x) = 0$

المشتقة : $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} = \frac{-1-2x}{(1+x)^2}$ إشارتها سالبة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و منه

الدالة g متناقصة على هذا المجال و متزايدة على المجال $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$.

ت-إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-0,72 < \alpha < -0,71$

بما أن $g(0)=0$ منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل معدوم .

ولدينا $g(-0,71)=0,03$ و $g(-0,72)=-0,03$ بما الدالة g متزايدة تماما على $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$ و

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,72 < \alpha < -0,71$

x	-1	α	0	$+\infty$
g	—	0	+	—

ج-استنتاج إشارة $g(x)$:

IV - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[\cup]-1, 0]$ بـ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

(5) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} \right] = +\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} \right] = -\infty$$

(6) دراسة تغيرات الدالة f : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x \ln(1+x)}{1+x} = \frac{x \cdot g(x)}{x^4}$ و منه إشارتها من إشارة البسط

x	-1	α	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	—	0	+	—
إشارة x	—	—	0	+
إشارة $x \cdot g(x)$	+	—	0	—

من جدول الإشارة نستنتج أن f متزايدة على المجال

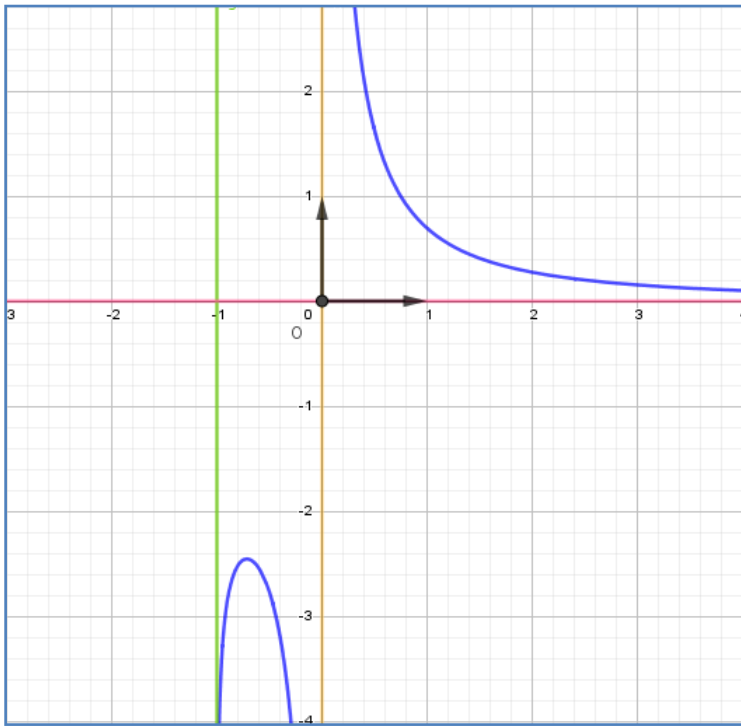
$]-1; \alpha]$ و متناقصة على المجالين $[\alpha; 0]$ و

$]0; +\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	-1	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—	—
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	0

(7) إنشاء المنحنى (C_f)



(8) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماماً نضع

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(t) dt$$

ت-تفسيراً هندسياً للعدد $I(\lambda)$ حسب قيم العدد

الحقيقي λ :

- لما $\lambda > 1$ فإن $I(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلتها $x=1$; $x=\lambda$; $y=0$.
- لما $0 < \lambda < 1$ فإن $-I(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلتها $x=1$; $x=\lambda$; $y=0$.

ث- بملاحظة أنه من أجل كل x عدد حقيقي من

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \quad :]1; +\infty[$$

$$\text{حساب } I(\lambda) : I(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(t) dt = \int_1^{\lambda} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = -\frac{\ln(1+t)}{t} \Big|_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} \frac{1}{t(1+t)} dt$$

$$\text{و منه } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^{\lambda} \quad \text{إذن } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + \int_1^{\lambda} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right] dt$$

$$\text{و منه } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + 2\ln(2) + \ln\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \quad \text{و } I(\lambda) = -\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} + \ln(2) + \ln\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 2\ln(2) : \lim_{x \rightarrow +\infty} I(\lambda) \quad \text{حساب}$$

انتهى الموضوع الأول

(5) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3u_n - 2^n$.

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 0$: لدينا $u_0 \leq 0$ محققة

فرض أن $u_n \leq 0$ و لبرهن أن $u_{n+1} \leq 0$

$u_n \leq 0$ يعني أن $3u_n \leq 0$ و منه $3u_n - 2^n \leq -2^n$ و $-2^n \leq 0$ و منه $u_{n+1} \leq 0$ محققة إذن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 0$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2^n = 2(u_n - 2^{n-1})$ و $u_n \leq 0$ إذن الفرق سالب إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

(6) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = 2^n - u_n$.

ت - إثبات أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : لدينا $v_{n+1} = 2^{n+1} - u_{n+1} = 2 \times 2^n - 3u_n + 2^n$.

أن $v_{n+1} = 2^{n+1} - u_{n+1} = 3 \times 2^n - 3u_n = 3(2^n - u_n) = 3v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها

الأول $v_0 = 2^0 - u_0 = 1$.

ث - تعبير عن كلا من u_n و v_n بدلالة n : $u_n = 2^n - 3^n$ و $v_n = 3^n$

(7) أ- حساب $\lim u_n = \lim [2^n - 3^n] = \lim 3^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right] = -\infty$ و منه المتتالية (u_n) متباعدة.

ب- حساب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و منه

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-3^{n+1}}{1-3} \quad \text{و} \quad S_n = (2^0 - 3^0) + (2^1 - 3^1) + (2^2 - 3^2) + \dots + (2^n - 3^n)$$

$$S_n = -\frac{1}{2} + 2^{n+1} - 3^{n+1} \quad \text{إذن} \quad S_n = -1 + 2^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - 3^{n+1})$$

(8) أ- الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

و منه لما $n = 4k$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 1 و لما $n = 4k+1$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 2

لما $n = 4k+2$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 4 و لما $n = 4k+3$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 3.

و بواقي قسمة 3^n على 4

$n =$	$2k$	$4k+1$	
$3^n \equiv$	1	3	[4]

و منه لما $n = 2k$ فإن باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 و لما $n = 2k+1$ فإن باقي قسمة 3^n على 4 هو 3.

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2018 + 1962^{2^n} + 1439^n \equiv 0[5]$ لدينا $2018 \equiv 3[5]$ و

$1962 \equiv 2[5]$ و منه $2^{2^n} \equiv 0[5]$ و $1439 \equiv 9[5]$ و منه $1439^n \equiv 3^{2^n}[5]$ إذن

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+2^{2n}+3^{2n} [5] \text{ يكافئ أن}$$

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+4^n+9^n [5] \text{ ولدينا } 9 \equiv 1 [5] \text{ و } 4 \equiv -1 [5] \text{ و منه } 9^n \equiv 1 [5] \text{ أي أن}$$

$$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 4+(-1)^n [5] \text{ حتى يكون } 2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 0 [5] \text{ يجب أن}$$

يكون n عدد زوجي .

التمرين الثالث (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ونعتبر النقط $E; D; C; B; A$ التي لواحقها على الترتيب $z_E = -2i$ و $z_D = -1+i$ و $z_C = 3i$ و $z_B = 4+i$ و $z_A = 1$

$$(6) \text{ إثبات أن } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i-1}{4+i-1} = \frac{3i-1}{3+i} = \frac{i(3+i)}{3+i} = i \text{ لدينا } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\cdot \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} \text{ و منه } \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-2i-1}{-1+i-1} = \frac{i(-2+i)}{-2+i} = i$$

نستنتج أنه يوجد تحويل نقطي T يحول D إلى E و يحول B إلى C و هو الدوران الذي مركزه A و زاويته

$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

(7) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$z_{C'} = \frac{1}{2}(1+i)3i + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = i-1 \text{ و منه } z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} z_C + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}\right) z_A$$

(8) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z صورتها M' ذات اللاحقة z' بالتشابه S .

$$\text{إثبات أن } z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1-i] \text{ لدينا } z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(1-i) \text{ و } z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} z + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi i}{4}}\right) z_A \text{ و منه}$$

$$z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1-i]$$

(9) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $z = (1+i)(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

تعيين طبيعة مجموعة النقط (Γ) لما θ يسمح المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ لدينا $z = (1+i) + (1+i)e^{i\theta}$ و منه

$$z - (1+i) = (1+i)e^{i\theta} \text{ يعني أن } |z - (1+i)| = |1+i| \text{ يعني أن } |z - (1+i)| = \sqrt{2} \text{ أي } MD = \sqrt{2} \text{ و}$$

منه لما θ يسمح المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ هي قوس من دائرة أي هي ربع الدائرة ذات المركز D و نصف القطر $\sqrt{2}$

ث - طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S هي ربع دائرة مركزها هو D' ذو اللاحقة

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 \text{ و نصف قطرها } z_{D'} = \frac{1}{2}[(1+i)^2 + 1-i] = \frac{1}{2}(1+i)$$

(10) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi [2\pi]$

طبيعة مجموعة النقط (γ) : $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi[2\pi]$ يكافئ $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$ يكافئ $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$.
 $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv \pi[2\pi]$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثالث (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(12; 7; -13)$ و $B(3; 1; 2)$ و المستويان $(P_1): 3x + 2y - 5z - 1 = 0$ و $(P_2): x + y - 2z = 0$.

(5) إثبات أن المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان بما أن شعاعيهما الناظميان على الترتيب $\vec{n}_1(3; 2; -5)$ و $\vec{n}_2(1; 1; -2)$ غير مرتبطان خطياً لأن $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{1}$ فهما متقاطعان وفق مستقيم

$B \in (P_1)$ يعني أن $3(3) + 2(1) - 5(2) - 1 = 0$ أي أن $0 = 0$ محققة

$B \in (P_2)$ يعني أن $(3) + (1) - 2(2) = 0$ أي أن محققة و منه B تنتمي إلى مستقيم التقاطع .

لدينا $\vec{n}_1 \cdot \vec{v} = 3 + 2 - 5 = 0$ و $\vec{n}_2 \cdot \vec{v} = 1 + 1 - 2 = 0$ و منه شعاع توجيه مستقيم التقاطع هو $\vec{v}(1; 1; 1)$

(6) إثبات أن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) : يعني أن $B \in (P_1)$ محققة

و $\overrightarrow{AB}(-9; -6; 15)$ مرتبط خطياً مع $\vec{n}_1(3; 2; -5)$ لدينا $\frac{-9}{3} = \frac{-6}{2} = \frac{15}{-5} = -3$ و منه محققة .

(7) ليكن (Q) المستوي المعروف بتمثيله الوسيطى التالى $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 6 \\ y = 2\alpha + 3\beta + 5 \\ z = 2\alpha - 6 \end{cases}$$

ت-إثبات أن (Q) و (P_1) متوازيان يعني أن الشعاع $\vec{n}_1(3; 2; -5)$ عمودي على الشعاعين المعينين للمستوي (Q) و هما $\vec{v}_1(2; 2; 2)$ و $\vec{v}_2(-2; 3; 0)$:

$\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 = 3(2) + 2(2) - 5(2) = 0$ و $\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3(-2) + 2(3) - 5(0) = 0$ محققة .

ث-التحقق أن المعادلة الديكارية للمستوي (Q) هي $3x + 2y - 5z = 58$ نعوض التمثيل الوسيطى في المعادلة الديكارية $3(2\alpha - 2\beta + 6) + 2(2\alpha + 3\beta + 5) - 5(2\alpha - 6) = 58$ يكافئ $58 = 58$ محققة .

ج-التحقق أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) : لدينا $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$ بالتعويض في المعادلة

الديكارية للمستوي (Q) : $3\left(\frac{15}{2}\right) + 2(4) - 5\left(-\frac{11}{2}\right) = 58$ محققة

و بما أن $\vec{n}_1(3; 2; -5)$ الشعاع الناظمي للمستوي (Q) و $\overrightarrow{AB}(-9; -6; 15)$ مرتبطان خطياً و المستوي يشمل I فهو المستوي المحور للقطعة المستقيمة $[AB]$.

(8) أ-إثبات أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي سطح كرة ذات القطر $[AB]$

أو بطريقة أخرى $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ يكافئ $(x-12)(x-3) + (y-7)(y-1) + (z+13)(z-2) = 0$ يكافئ

$x^2 + y^2 + z^2 - 15x - 8y + 11z + 17 = 0$ و هي سطح الكرة الذي مركزه $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$ و نصف قطره

$$\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2}$$

ب- تعيين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع (S) والمستوي (Q) بما أن I نقطة من المستوي (Q) يعني أن (S) والمستوي (Q) يتقاطعان وفق دائرة مركزها $I\left(\frac{15}{2}; 4; -\frac{11}{2}\right)$ و نصف قطرها هو $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{342}}{2}$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(8) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

لدينا بتوحيد المقامات نجد $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}} + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ محققة .

بما أن IR متناظرة بالنسبة O و

$$f(-x) = 1 - \frac{1}{2}(-x) - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left[1 - \frac{1}{e^x + 1}\right] = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x + 1} = -f(x)$$

فإن f دالة فردية .

(9) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right] = -\infty$

(10) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x + 1)^2 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2}$$

• جدول تغيرات الدالة f على IR^+ بما أن $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ فإن الدالة f متناقصة على IR^+

x	0	$+\infty$
f'(x)		—
f(x)	0	$+\infty$

(11) استنتاج انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

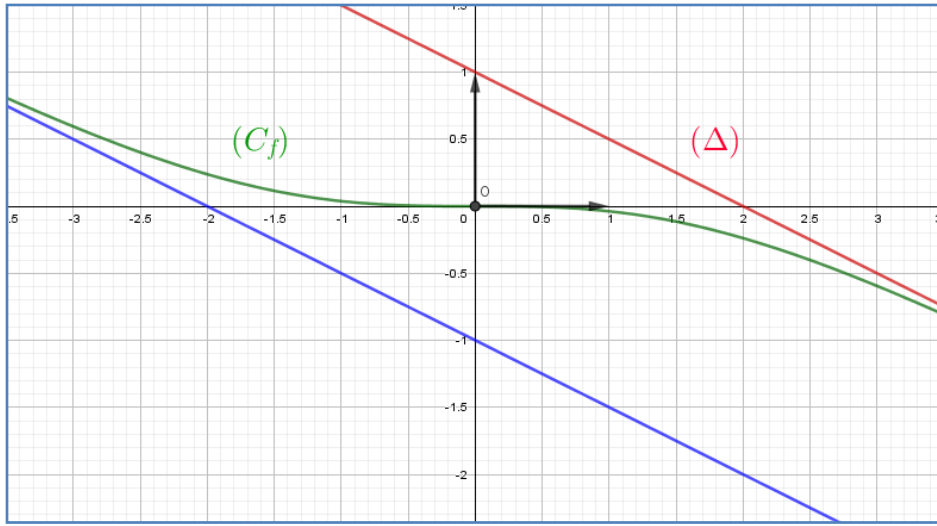
$$1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$$

$$\text{موجب } x : f(x) \leq 0 \text{ أي أن } 1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$$

(12) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{e^x + 1} = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right]$

التفسير الهندسية : من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب معادلته $y = 1 - \frac{1}{2}x$ جهة $+\infty$.

(13) إنشاء المستقيم (Δ) ذو المعادلة
 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ و المنحنى (C_f) :



(14) أ-إثبات أن الدالة $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$ بالاشتقاق:

$x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$ دالتها المشتقة هي $x \mapsto \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ بالضرب في e^x في البسط و المقام نجد $x \mapsto \frac{-1}{1 + e^x}$ و منه محققة .

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x = 0$; $x = 1$

$$A = \int_0^1 -f(t)dt = \int_0^1 \left[-1 + \frac{1}{2}t + \frac{2}{e^t + 1} \right] dt = \left[-t + \frac{1}{4}t^2 - 2\ln(e^{-t} + 1) \right]_0^1$$

$$A = \left[-\frac{3}{4} - 2\ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) + 2\ln(2) \right] u.a \approx 0,01 u.a$$

انتهى الموضوع الثاني