الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية سعيدة

ثانوية الدكتور يوسف الدمرجي

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

***** دورة ماي 2018*****

المستوى السنة الثالثة : تقني رياضي . المدة: 4 ساعات ونصف .

**** على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين ****

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04.00 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 4 كريات تحمل العدد a و 5 كريات تحمل العدد $(a-1)$ لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات دفعة واحدة .

1) أحسب إحتمال الحادثتين التاليتين :

A : سحب ثلاث كريات تحمل نفس العدد .

B : سحب كريتين بالضبط تحمل نفس العدد .

2) نعرف المتغير العشوائي **X** وهو الذي يأخذ مجموع الأعداد المسجلة على الكريات المسحوبة .

أ - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي **X** .

ب - أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي **X** .

ج ـ أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $E(X)$ بدلالة a ثم حدد قيمة a من أجل $E(X)=0$.

التمرين الثاني :(04.00 نقاط)

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب Z والمعرّف كما يلي : $p(z)=(iz+4)(z+1-6i)(z-3+2i)$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z)=0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب $3-2i$ ، $-1+6i$ ، $4i$.

1) أ ـ أكتب العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل الأسي ، ماذا تستنتج ؟ .

ب ـ حدد طبيعة التحويل $\hbar$ الذي مركزه C و يحول A إلى B مع تحديد العناصر المميزة له .

2) لتكن Ω نقطة من محور الفواصل مركز الدوران $\Re$ الذي يحول A إلى B يطلب تحديد زاويته β.

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي ذات اللاحقة Z والتي تحقق : $|Z-4i|=\sqrt{5}$.

أ ـ عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ).

ب ـ عين (γ) صورة (Γ) بالتحويل $\hbar$ و (γ') صورة (Γ) بالدوران $\Re$ مع تحديد العناصر المميزة لكل منهما.

التمرين الثالث: (05.00 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

.1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$.

.2 أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

.3 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$.

أ ـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 10 يطلب حساب حدها الأول .

ب ـ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$ ، أحسب نهاية (u_n) .

.4 أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}.......+\frac{1}{u_n}$.

التمرين الرابع: (07.00 نقاط)

.I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1 & ;\ x \succ 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2cm)

(1 أ ـ أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2 أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3 بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$ ثم تحقق أن : $4,6 \prec \alpha \prec 4,7$.

(4 أكتب معادلة للمستقيم (Δ)مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

.II لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$.

(1 أ ـ أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة $g'(x)$ ثم استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ حدد إتجاه تغير الدالة $g(x)$ ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ج ـ أنشئ : (Δ) و (C_f) .

(2 من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$

أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_n بدلالة n .

ب ـ استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\frac{1}{n}$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$.

إنتهـــــــــى نتمنى لكم النجاح في شهادة البكالوريا

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول : (05.00 نقط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0..........(1)$.

II. نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

النقط A ، B ، C ، M لواحقها على الترتيب $1+i$ ، $1-i$ ، $2+\beta i$ ، $z=x+iy$.(حيث x ، y ، β أعداد حقيقية و $\beta \prec 0$) .

وليكن العدد المركب L المعرف من أجل كل $z\neq 2i$ بـ : $L=\dfrac{z+2i}{z-2i}$.

1) أكتب العدد L على الشكل الجبري .

2) أوجد المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي في الحالتين الآتيتين والتي تحقق :

أ ـ L عدد تخيلي صرفا .

ب ـ $|L|=1$.

3) أ ـ بين أنه من أجل $z=4+2i$ فإن : $L=z_A$ و $\overline{L}=z_B$.

ب ـ بين أن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المجموعة (Γ) في الحالة 2) ب) .

4) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{6}$.

5) أوجد العدد الحقيقي β بحيث تكون النقط D ، C ، A في استقامية ، ثم استنتج نوع التحويل النقطي الذي يحول النقطة C إلى D مع تعين خصائصه المميزة .

التمرين الثاني : (04.00 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة : $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

II. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $2014x-475y=-19........(\text{I})$.

1) عين الحل الخاص (x_0,y_0) للمعادلة (I) والذي يحقق : $y_0-4x_0=1$.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) .

3) بين أن العددين x و y أوليان فيما بينها باعتبار الثنائية (x,y) من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (I) .

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث $n\equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على العدد 106 هو 17 .

5) عين كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (I) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10 .

التمرين الثالث : (04.00 نقط)

A ، B ، C ، O أربع نقط من الفضاء و G نقطة تحقق : $\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء والتي تحقق : $\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}=0$.

2) الفضاء منسوب إلى معلم ،متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. تعتبر مجموعة المستويات (π_m) المعرفة بالمعادلة : $(2-m)x+y+mz+6m-6=0$ حيث m وسيط حقيقي .

أ ـ بين أن كل المستويات (π_m) تشمل مستقيما ثابتا يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

ب ـ اكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(2;1;2)$ ونصف قطرها 3 .

ج ـ عين قيم العدد الحقيقي m بحيث يكون المستوي (π_m) مماسا لسطح الكرة (S) .

3) هل توجد قيمة للعدد الحقيقي m بحيث يكون المستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ عمودي على (π_m) ؟ علل.

التمرين الرابع : (07.00 نقط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على IR كمايلي : $g(x)=xe^{-x}-1$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة g .

2) استنتج إشارة $g(x)$ على IR .

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x ، المعرفة على IR كمايلي : $f(x)=\left(xe^{-x}-1\right)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة $2cm$)

1) أ ـ أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب ـ بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ، ماذا تستنتج ؟ .

2) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=2g(x)g'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب ـ أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أرسم : (T) و (C_f) .

III. لتكن $h(x)$ دالة معرفة على IR كما يلي : $h(x)=-\dfrac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x+1\right)+2e^{-x}(x+1)+x$.

1) بين أن الدالة $h(x)$ أصلية للدالة f على IR .

2) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $x=1$ و $x=2$ ، $y=1$.

إنتهـــــــــى   نتمنى لكم النجاح في شهادة البكالوريا

تصحيح الإمتحان التجريبي [3 ثر].
الموضوع الأول

التمرين الأول:

1/ عدد الحالات الكلية هو: C_9^3

$C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3!} = 84$

$P(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{C_4^2\times C_5^1 + C_5^2\times C_4^1}{84} = \frac{5}{6}$

2/أ $X = \{3a, 3a-1, 3a-2, 3a-3\}$

ب- $P(3a) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{21}$

$P(3a-1) = \frac{C_4^2\times C_5^1}{84} = \frac{5}{14}$

$P(3a-2) = \frac{C_4^1\times C_5^2}{84} = \frac{10}{21}$

$P(3a-3) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{5}{42}$

جـ- $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(x_i)$

$= 3a\times\left(\frac{1}{21}\right) + (3a-1)\left(\frac{5}{14}\right) + (3a-2)\left(\frac{10}{21}\right) + (3a-3)\times\left(\frac{5}{42}\right)$

$E(X) = \frac{9a-5}{3}$ (بعد الإختزال)

$\boxed{a = \frac{5}{9}}$ معناه $E(X)=0$

$E(X)=0$ يكافئ $9a-5=0$

$9a=5$

$a=\frac{5}{9}$

1 ص

التمرين الثاني:

I/ $P(z)=0$ يكافئ:

$iz+4=0$ أو $z+1-6i=0$ أو $z-3+2i=0$

$z=\frac{-4}{i}=4i$ أو $z=-1+6i$ أو $z=3-2i$

$S=\{4i; -1+6i; 3-2i\}$

II/ 1/أ-

$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1+2i}{3-6i}$

$= \frac{\cancel{(-1+2i)}}{-3\cancel{(-1+2i)}} = -\frac{1}{3}$

$\left|\frac{-1+2i}{3-6i}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$\arg\left(\frac{-1+2i}{3-6i}\right) = \pi + 2\pi k \,/\, (k\in\mathbb{Z})$

$\frac{-1+2i}{3-6i} = \frac{1}{3}e^{\pi i}$

نستنتج أن النقط A ، B ، C في استقامية.

ب- العبارة المركبة لـ h هي

$z' = az+b$

ومنه $C \longmapsto C$ | $h(C)=C$

$A \longmapsto B$ | $h(A)=B$

$\begin{cases} z_B = a z_A + b & (1) \\ z_C = a z_C + b & (2) \end{cases}$

بالطرح نجد $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -\frac{1}{3}$

بما أن $a\in\mathbb{R}^*$ ومنه h تحاكي مركزه النقطة C ونسبته $-\frac{1}{3}$

2/ Ω تنتمي الى (xx') معناه $\Omega(x,0)$ وبما أن الدوران تقايس أي $\Omega A = \Omega B$ فإن

$$|z_A - z_\Omega| = |z_B - z_\Omega|$$

$$|3-2i-x| = |-1+6i-x|$$

بالتربيع $(3-x)^2+4 = (-1-x)^2+36$

بعد التبسيط $x=-3$ أي $\Omega(-3,0)$

$\dfrac{\Omega B}{\Omega A} = 1$ معناه $\Omega A = \Omega B$

أي $\theta = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$

$$= \arg(z_B - z_\Omega) - \arg(z_A - z_\Omega)$$

$$= \arg(2+6i) - \arg(6-2i)$$

$$= \arg\left(\frac{2+6i}{6-2i}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)$$

$$= \arg(i)$$

ومنه $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

3/ أ-

$|z-4i| = \sqrt{5}$ تكافئ $|z_M - z_C| = \sqrt{5}$

$CM = \sqrt{5}$

ومنه (S) هي عبارة عن دائرة مركزها النقطة C ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

إذا كانت $B \in (S)$ فإن $|z_B - z_C| = \sqrt{5}$

$$|z_B - z_C| = |-1+6i-4i| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{5}$$

ومنه $B \in (S)$

ب- (γ) صورة (S) بالتحويل h هي دائرة مركزها النقطة C ونصف قطرها R حيث

$$R = \left|-\frac{1}{3}\right| \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(γ') صورة (S) بالدوران R هي دائرة نصف قطرها $R=\sqrt{5}$ ومركزها C' حيث C' صورة C بالدوران R المعطى

$$z_{C'} = -7+3i$$

العبارة المركبة للدوران هي

$$z' = iz + 3i - 3$$

$$z_{C'} = i z_C + 3i - 3 = -7+3i$$

التمرين الثالث:

$U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$ | $U_0 = \frac{1}{3}$

/1 مرحلة التحقق: من أجل $n=0$

لدينا $0 < U_0 < \frac{1}{2}$

محققة من أجل كل n

مرحلة الفرضية: نفرض أن $0<U_n<\frac{1}{2}$ محققة ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

أي $0<U_{n+1}<\frac{1}{2}$

لدينا $0<U_n<\frac{1}{2}$

$0<2U_n<1$ (الضرب في العدد 2)

$1<2U_n+1<2$ (إضافة 1)

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2U_n+1} < 1$ (المقلوب)

$-1 < -\frac{1}{2U_n+1} < -\frac{1}{2}$ (الضرب في (-1))

$0 < 1-\frac{1}{2U_n+1} < \frac{1}{2}$

$0<U_{n+1}<\frac{1}{2}$

وإذا هي محققة من أجل $n+1$

خلاصة: $0<U_n<\frac{1}{2}$

/2 -أ- $U_{n+1}-U_n = 1-\frac{1}{2U_n+1} - U_n$

$= \frac{2U_n+1-1-U_n-2U_n^2}{2U_n+1}$

$= \frac{U_n-2U_n^2}{2U_n+1}$

$= \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ محققة.

لدينا $0<U_n<\frac{1}{2}$ إذن $\frac{U_n}{2U_n+1}>0$

لتكون سالبة $(1-2U_n)$

نضع $U_n = X$ نجد

$1-2X=0$ يكافئ $X=\frac{1}{2}$

$0 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad -$

ومنه $1-2U_n>0$

وإذا (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب- بما أن (U_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما فهي متقاربة نحو العدد $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = f(l)$

$f(l)=l$ يكافئ $1-\frac{1}{2l+1} = l$

يكافئ $l(2l+1) = 2l+1-1$

$2l^2 - l = 0$

$l(2l-1)=0$

$l=0$ أو $l=\frac{1}{2}$

بما أن (U_n) متزايدة تماما فإن $l=\frac{1}{2}$

وإذا $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

/3 $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n-1}$

-أ- $V_{n+1} = \frac{5^{n+1}U_{n+1}}{2U_{n+1}-1}$

$= \frac{5^{n+1}\left(\frac{2U_n}{2U_n+1}\right)}{2\left(\frac{2U_n}{2U_n+1}\right)-1}$

$= \frac{5^n\times5^1\times 2\times U_n}{2U_n-1}$

لأن 2^n متتالية هندسية أساسها 2

$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ و $2>1$

و $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2^n} = 0$

14 $S_n = \frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_n}$

لدينا $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$ ومنه

$$\frac{1}{U_n} = \frac{2^{n+1}+3}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n}+\frac{3}{2^n}$$
$$= \frac{2^n\times 2}{2^n}+\frac{3}{2^n}$$
$$= 2+\frac{3}{2^n}$$

ومنه

$$S_n = 2+\frac{3}{2^0}+2+\frac{3}{2^1}+\dots+2+\frac{3}{2^n}$$
$$=3\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)+2(n+1)$$

$\frac{1}{2^n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2^0}=1$

$$S_n = 3\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]+2(n+1)$$
$$=6\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+2n+2$$
$$=2n+8-6\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ص 4

$$V_{n+1} = \frac{10\times 5^n U_n}{2U_n-1} \to V_n$$
$$=10V_n$$

ومنه (V_n) م ه أساسها 10 وحدها الأول V_0 حيث

$$V_0 = \frac{U_0}{2U_0-1} = -\frac{1}{3}$$

ب- $V_n = V_p\, q^{n-p} = -\frac{1}{3}\times 10^n$

لدينا $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n-1}$ ومنه

$$2U_nV_n - V_n = 5^n U_n$$
$$2U_nV_n - 5^n U_n = V_n$$
$$U_n(2V_n - 5^n) = V_n$$
$$U_n = \frac{V_n}{2V_n-5^n} = \frac{-\frac{1}{3}\times 10^n}{2\times(-\frac{1}{3}\times 10^n)-5^n}$$
$$= \frac{-\frac{10^n}{3}}{-\frac{2\times 10^n+3\times 5^n}{3}}$$
$$= \frac{10^n}{2\times 10^n+3}$$
$$= \frac{\cancel{5^n}\times 2^n}{2\times 2^n\times \cancel{5^n}+3\times \cancel{5^n}}$$
$$= \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$$

محققة

$$\boxed{10^n = (2\times 5)^n = 2^n\times 5^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n(2+\frac{3}{2^n})}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\cancel{\frac{3}{2^n}}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

I/1) أ- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

ب- $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{3}{2}x - \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

ومنه (C_f) يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $A(0,1)$

2) f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ مجال مفتوح.

$f'(x) = \frac{2}{2}x(3-\ln x^2) + \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2x}{x^2}\right)$

$= 3x - x\ln x^2 - x$

$= x(-\ln x^2 + 2)$

$f'(x)=0$ يعني أن $2-\ln x^2=0$ أو $x=0$

$\ln x^2 = 2$ أو $x=0$

$x^2 = e^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^2} = \pm e$ أو $x=0$

ومنه $f'(x)=0$ لما $x=e$

لما $x\in]0,e]$: $f'(x)\geq 0$

لما $x\in]e,+\infty[$: $f'(x)<0$

جدول التغيرات:

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

$f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$

3) من جدول التغيرات نلاحظ أن $f(x)$ مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]e,+\infty[$

ولدينا $\lim f(x) = -\infty < 0$ و $f(e)=\frac{1}{2}e^2+1 > 0$ موجبة

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق

$f(\alpha)=0$ و $\alpha>0$

بحساب $f(4,7)$ و $f(4,6)$

نجد $f(4,6)\times f(4,7)<0$.

4) $(\Delta): y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$= 2x + \frac{1}{2}$

II/ $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1) أ- g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$g'(x) = f'(x) - 2$

$= 2x(1-\ln x) - 2$

g' قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

حساب $g''(x) = -2\ln x$

$g''(x)=0$ يعني $-2\ln x = 0$

$x = 1$

$0 \quad + \quad 1 \quad - \quad +\infty$

x	0		1		$+\infty$
g''		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	-2	↗	0	↘	$-\infty$

ومنه إشارة $(g'(x)<0)$

ب- بما أن $g'(x)<0$ فإن $g(x)$

فإن $g(x)$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

$$I_n = \int_{1/n}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

2)

1-

$$I_n = \int_{1/n}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

نضع:

$f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = 1/x$

$g'(x) = x^2 \longrightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$I_n = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{1/n}^{1} - \int_{1/n}^{1} \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_{1/n}^{1} - \int_{1/n}^{1} \frac{1}{3}x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_{1/n}^{1}$$

بعد التبسيط نجد:

$$I_n = \frac{1}{3n^3}\left[\frac{1}{3} + \ln(n)\right] - \frac{1}{9}$$

ب-

$$A(n) = \int_{1/n}^{1} \left[f(x) - y_{(\Delta)}\right] dx$$

$$f(x) - y_{(\Delta)} = g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - I_n$$

$$A(n) = \int_{1/n}^{1} \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right] dx - I_n$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{1/n}^{1} - I_n$$

بعد التبسيط نجد:

$$A(n) = \left[\frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln(n)}{3n^2} + \frac{1}{9}\right] \times 4$$

الوحدة

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{1}{9} \times 4$$

الوحدة

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{4}{9} \ (cm^2)$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$		$1/2$	0		$-\infty$

ومنه إشارة $g(x)$ هي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

وضعية (C_f) و (Δ) نتحصل على إشارة الفرق

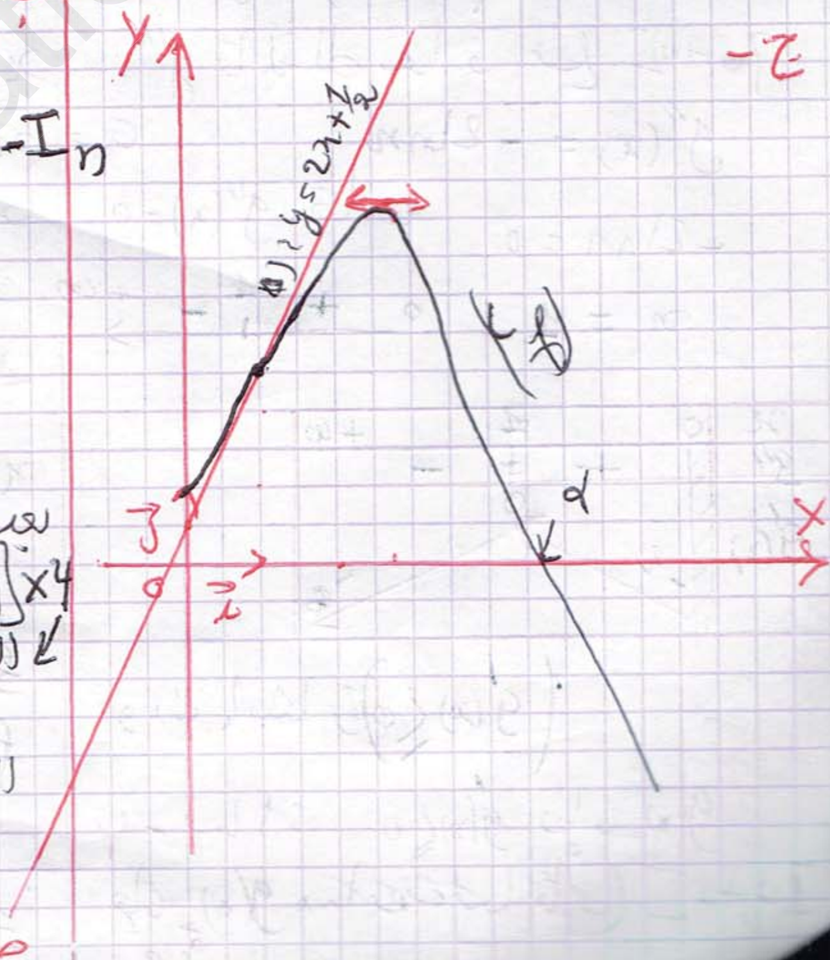
$$\left[f(x) - y_{(\Delta)}\right] = g(x)$$

إذا إشارته هي إشارة $g(x)$

وبالتالي

x	0		1		$+\infty$
الفرق		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)	

ج-



الموضوع الثاني [3 تر]

التمرين الأول:

I/

$z^2-2z+2=0$

$\Delta' = (1)^2-(1)(2) = -1 = i^2$

$z_1 = \frac{1+i}{1} = 1+i$

$z_2 = \overline{z_1} = 1-i$

$S=\{1+i\,;\,1-i\}$

II/1)

$L = \frac{z+2i}{z-2i} = \frac{x+iy+2i}{x+iy-2i}$

$= \frac{x+(y+2)i}{x+(y-2)i} = \frac{[x+(y+2)i][x-(y-2)i]}{x^2+(y-2)^2}$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$L = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2} + \frac{4x}{x^2+(y-2)^2}i$

2) أ- L تخيلي صرفا معناه جزؤه الحقيقي معدوم أي

معناه $\frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \quad (1) \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \iff (x,y)\neq(0,2) \end{cases}$

(1) تكافئ $(x-0)^2+(y-0)^2=(2)^2$

ومنه (S) دائرة مركزها O و $r=2$

ب- $|L|=1$ معناه (S) محورية.

3) أ- $L = \frac{z+2i}{z-2i} = \frac{4+2i+2i}{4+2i-2i} = z_A$

ولدينا $z_B = \overline{L}$ أي $z_B = \overline{z_A}$

ب- $|L|=1$ تكافئ $\left|\frac{z_A+2i}{z_B-2i}\right| = 1$

$|z_A+2i| = |z_B-2i|$

$|1+3i| = |1-3i|$

$\sqrt{10} = \sqrt{10}$

ومنه A و B متناظرتان بالنسبة لـ (S).

4) العبارة المركبة للتشابه هي

$z' = (\sqrt{3}+i)z-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}i$

وبالتعويض نجد $z_D = 3+i$

5/ A، C، D في استقامية معناه الشعاعان $\vec{AD}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطيا أي

$\vec{AD} = k\,\vec{AC} \;/\; (k\in\mathbb{R}^*)$

إذا $k = \frac{z_D-z_A}{z_C-z_A} = \frac{2}{1+(\beta-1)i}$

حتى يكون K حقيقي معناه $\beta-1=0$

$\boxed{\beta=1}$

ومنه $\vec{AD} = 2\,\vec{AC}$

التحويل هو تحاكي نسبته 2 ومركزه A.

التمرين الثاني:

I) إذا $2014\alpha = 475\beta+m$

$2014\alpha-475\beta=m$

ولدينا $PGCD(2014,475)=19$

إذا $19(106\alpha-25\beta)=m$

معناه 19 قاسم لـ m إذا

$m=19K \;/\; (K\in\mathbb{Z})$

II/ $2014x-475y=-19$ — (I)

(I) تكافئ $19(106x-25y)=-19$

تكافئ $106x-25y=-1$

1) نضع (x_0,y_0) لدينا $y_0-4x_0=1$ إذا

$y_0=4x_0+1$

بالتعويض في المعادلة (I) نجد

$106x_0-25(4x_0+1)=-1$

بعد حل هذه المعادلة نجد

$x_0=4 \ , \ y_0=17$

$(x_0,y_0)=(4,17)$

2) المعادلة (I) تكافئ

$106x-25y=-1$

ولدينا $(4,17)$ حل خاص لها إذا

$$\begin{cases}106x-25y=-1\\106(4)-25(17)=-1\end{cases}$$

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا 25 و 106 أوليان فيما بينهما

إذا حسب مبرهنة غوص

25 يقسم $x-4$ أي

$x-4=25k$

ومنه $\boxed{x=25k+4}$

بنفس الطريقة نجد

$\boxed{y=106k+17}$

$S=\{(25k+4;106k+17)\}\ (k\in\mathbb{Z})$

3) ليكن d قاسم مشترك لـ x و y ومنه d قاسم لـ $106x$ و $25y$ إذا d قاسم $106x-25y$ أي d قاسم لـ -1 وبما أن $d\in\mathbb{N}$ فإن $d=1$

إذا $PGCD(x,y)=1$

ومنه x و y أوليان فيما بينهما.

4) نحل الجملة

$$\begin{cases}n\equiv 4[25]\\n\equiv 17[106]\end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{cases}$$

$25\alpha+4=106\beta+17$

$106\beta-25\alpha=-13$

لدينا $(4,17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$ مما سبق

ومنه $(4\times13;17\times13)$ حل خاص

للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$

بعد حل هذه المعادلة باستعمال مبرهنة غوص نجد

$$\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases}\ (p\in\mathbb{N})$$

ولدينا $n=106\beta+17$

بالتعويض نجد

$n=106(25p+52)+17$

$=2650p+5529\ (p\in\mathbb{N})$

5) $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه

$x+y\equiv 0[10]$

$x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

ومنه $131k+21\equiv 0[10]$

لدينا $131\equiv1[10]$ و $21\equiv1[10]$

إذا $k+1\equiv0[10]$ ومنه

$k\equiv 9[10]$ أي $k=10k'+9$

$(k'\in\mathbb{Z})$.

$x=25(10k'+9)+4$

$=250k'+229$

$y=106(10k'+9)+17=1060k'+971$

التمرين الثالث:

1/ لدينا G مرجح الجملة

$\{(O,1),(A,2),(B,3)\}$

أ) من أجل كل نقطة M من الفضاء

$$\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(1+3+2)\overrightarrow{MG}$$
$$=6\overrightarrow{MG}$$

ومنه $6\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

$$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MC}=0$$

إذا المجموعة (S) هي سطح كرة قطرها $[GC]$

2/ أ- $(2-m)x+y+mz+6m-6=0$

$$2x-mx+y+mz+6m-6=0$$
$$2x+y-6+(z-x+6)m=0$$

معناه
$$\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ z-x+6=0 \end{cases}$$

وهي جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم في الفضاء

إذا كل المستويات (P_m) تشمل مستقيم ثابت (Δ) حيث

$$(\Delta)\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ z-x+6=0 \end{cases}$$

بوضع $x=t$ نجد تمثيل وسيطي لـ (Δ):

$$\begin{cases} x=t \\ y=-2t+6 \\ z=t-6 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب- $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(3)^2$

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$$

ج- (P_m) مماسا لـ (S) معناه

$$d[\Omega,(P_m)]=3$$

$$\frac{|(2-m)\times2+1+m(2)+6m-6|}{\sqrt{(2-m)^2+(1)^2+m^2}}=3$$

$$\frac{|6m-1|}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=3$$

بتربيع الطرفين وجداء الطرفين يساوي جداء الوسطين نجد:

$$18m^2+24m-44=0$$

$$\Delta'=936$$

$$m_1=\frac{-2-\sqrt{26}}{3},\quad m_2=\frac{-2+\sqrt{26}}{3}$$

3/ $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n}_{(P_m)}\begin{pmatrix}2-m\\1\\m\end{pmatrix}$

$(P_m)\perp(\Delta)$ معناه $\vec{u}_{(\Delta)}$ و $\vec{n}_{(P_m)}$ مرتبطان خطيا. معناه

$$\frac{2-m}{1}=\frac{1}{-2}=\frac{m}{1}$$

$\frac{m}{1}=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\boxed{m=-\frac{1}{2}}$

$\frac{2-m}{1}=-\frac{1}{2}$ تكافئ $-2m+4=-1$

$$-2m=-4-1$$

$$\boxed{m=\frac{5}{2}}$$

ومنه m قيمة غير ثابتة

وبالتالي لا توجد قيمة لـ m.

التمرين الرابع:

I/ 1)

$g(x) = xe^{-x} - 1$

$D_g =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1 \quad | \quad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

$g(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

$= e^{-x}(1-x)$ $\quad + \; 1 \; -$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1}-1$	$\searrow$	-1

$g(1) = e^{-1} - 1 < 0$

2) من جدول التغيرات نلاحظ أن: $g(x) < 0$

II/

$f(x) = (xe^{-x} - 1)^2$

1) أ-

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ إذاً $y = 1$ م م م لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ج)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(xe^{-x}-1)^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2e^{-2x} - 2xe^{-x} + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{-2x} - 2e^{-x} + \frac{1}{x}\right)$

$= (-\infty)(+\infty) - 2(+\infty) + 0$

$= -\infty$

نستنتج أن (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب.

2) أ- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2(e^{-x} - xe^{-x})(xe^{-x} - 1)$

$= 2g'(x) \times g(x)$

ومنه إشارة f' من إشارة $g(x)$ و $g'(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ب-

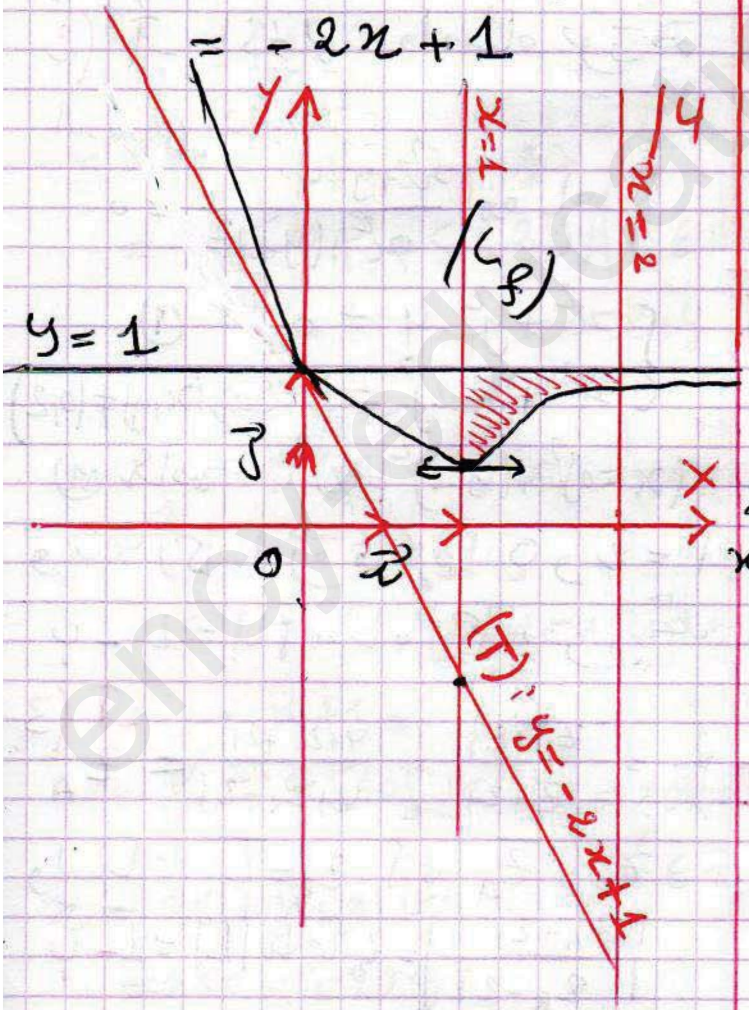
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$(e^{-1}-1)^2$	$\nearrow$	1

$f(1) = (e^{-1}-1)^2 \simeq 0,39$

3) $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= -2x + 1$

4)



III

$$h(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+1) + 2e^{-x}(x+1) + x$$

1) h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$h'(x) = -\frac{1}{4}(-2)(2x^2+2x+1)e^{-2x} + (4x+2)\left(-\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + 2e^{-x} + (x+1)(-2e^{-x}) + 1$$

$$h'(x) = x^2e^{-2x} + \cancel{xe^{-2x}} + \cancel{\frac{1}{2}e^{-2x}} - \cancel{xe^{-2x}} - \cancel{\frac{1}{2}e^{-2x}} + \cancel{2e^{-x}} - 2xe^{-x} - \cancel{2e^{-x}} + 1$$

$$h''(x) = x^2e^{-2x} - 2xe^{-x} + 1$$

$$= (xe^{-x} - 1)^2 = f(x)$$

ومنه $h(x)$ أصلية لـ $f(x)$.

2)

$$A = \int_1^2 [1 - f(x)]\,dx$$

$$= [x - h(x)]_1^2$$

$$= [2 - h(2)] - [1 - h(1)]$$

$$\approx 0,54 \times \underbrace{2\times 2}_{\text{الوحدة}}$$

$$\approx 2,16\ cm^2$$