



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

### الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

I نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$  .

- برهن بالتراجع أن المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

II نعتبر الآن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$  .

(1) أملء الجدول التالي ( تعطى النتائج مقربة إلى  $10^{-3}$  ) .

أذكر تخميناً يتعلق باتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها .

(2) أ- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، فإن  $0 < u_n \leq 2$  .

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي  $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$  .

أ- برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  .

ب- أكتب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم عين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

(4) أحسب، بدلالة  $n$ ، المجموع :  $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$  ثم استنتج الجداء :  $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة ب : 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة ب : 3، 2، 3- و كرية بيضاء تحمل الرقم 1-.

(1) نسحب عشوائياً أربع كريات و في آن واحد. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على أربع كريات تحمل نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  ثم عرف قانون احتمالته.

(ب) أحسب  $E(X)$  الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  .

(ج) أحسب احتمال الحدث : "  $X^2 - X > 0$  "

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1/ حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E)  $3x - 2y = 1$ .....

2/ ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم.

أ/ بين ان الثنائية  $(14n + 3; 21n + 4)$  حل للمعادلة (E) .

ب/ استنتج ان العددين  $14n + 3$  و  $21n + 4$  اوليان فيما بينهما.

3/ ليكن  $d$  هو القاسم المشترك الاكبر للعددين  $21n + 4$  و  $2n + 1$  .

أ/ عين قيم  $d$  .

ب/ بين ان  $n \equiv 6 [13]$  يكافئ  $d = 13$  .

4/ من اجل كل عدد طبيعي  $n \geq 2$  و نضع  $a = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$  و  $b = 21n^2 - 17n - 4$  .

أ/ بين ان  $a$  و  $b$  مضاعفان للعدد  $(n - 1)$  .

ب/ عين حسب قيم  $n$  القاسم المشترك الاكبر للعددين  $a$  و  $b$  .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1 ① الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .

(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  اشارة  $g(x)$  .

2 ② نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x + (x + 1)e^{1-x}$

وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ/ بين ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ، ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

ب/ بين انه من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = g(x)$  ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

ج/ استنتج ان للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

(2) أ/ بين ان المستقيم  $(\Delta)$  المعرف بالمعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  .

ب/ ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة الى المستقيم  $(\Delta)$  .

(3)  $(T)$  المستقيم الذي معادلته  $y = x + e$  . بين ان  $(T)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيين احداثيتها.

(4) أ/ بين ان المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-0.9 < \alpha < -0.8$  .

ب/ أنشئ  $(\Delta)$  و  $(T)$  ثم  $(C_f)$  .

ج/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و اشارة حلول المعادلة  $(x + 1)e^{1-x} = |m|$  .

## الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

(أ) بين أن  $P(z)$  يكتب على الشكل  $P(z) = (z - 8)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$  ، حيث  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  التي لواحقها على الترتيب هي :

$$z_C = 8 ، z_B = 2 + 2\sqrt{3}i ، z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$$

(أ) أحسب طولية وعمدة العدد المركب  $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$  ، علم النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  .

(ب) أحسب  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$  ثم عين طولية وعمدة  $Z$  ، واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل العدد 1 و واحدة تحمل العدد 2 وكرتين حمراوين تحملان العددين 0 و -1 . كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .

1/ نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التوالي بالارجاع.

أ/ ما احتمال  $A$  " الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما " .

ب/ ما احتمال  $B$  " الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني " .

2/ نقوم باستبدال الكرات الحمراء بـ  $n$  كرة بيضاء تحمل العدد 2 حيث  $n > 1$  و نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون ارجاع.

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله.

ب/ بين ان الامل الرياضي  $E(X) = \frac{4n + 10}{n + 4}$  .

ج/ عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي  $n$  حيث يكون  $E(X) > \frac{39}{10}$  .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة  $Z^2$  المعادلة :  $(E) \dots 5x - 6y = 3$

(1) أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  فإن  $x$  مضاعف للعدد 3 .

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة  $(E)$  ، ثم حل في  $Z^2$  المعادلة  $(E)$  .

$$\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases} : (S) \text{ الجملة}$$

د- حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية.

(2) عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق :  $x^2 - y^2 \leq 56$

(3) a و b عدنان طبيعيين حيث :  $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$  في النظام ذو الأساس 3 و  $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$  في النظام ذو الأساس 5 .

- عين  $\alpha$  و  $\beta$  حتى تكون الثنائية (a, b) حلا للمعادلة (E).

### التمرين الرابع : (7 نقاط)

1. g الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  :  $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

(1) بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$  ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  يحقق :  $3.9 < \alpha < 4$  .

(4) عين إشارة  $g(x)$  حسب قيم x .

II. f الدالة المعرفة بـ  $f(0) = 0$  ومن أجل كل عدد حقيقي x على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{(\ln(x+1))^2}{x}$  وليكن

$(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ثم فسر النتيجة هندسياً.

ج- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  وفسر النتيجة هندسياً.

(2) بين أنه من أجل كل x على المجال  $]-1; +\infty[$  فإن :  $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} g(x)$

أ- عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن :  $f(\alpha) = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}$  ثم عين حصر لـ  $f(\alpha)$  .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى  $(C_f)$  عند مبدأ المعلم.

د) أرسم المنحنى  $(C_f)$  و المماس (T) .

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2021