الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة : تقني رياضي

ثانوية ابن عليوي صالح
دورة ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات

المدة : 04 سا

اختر احد الموضوعين الاتيين

الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول V_0 و أساسها q حيث
$$\begin{cases}\ln V_0 + \ln V_2 = 2ln2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6\end{cases}$$

ا) احسب V_1 و V_0 ثم استنتج قيمة الأساس q

ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots\dots\dots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

ه) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء جميع الكرات متماثلة .نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضياتي هو:

ا) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2 ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فأن قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين هي $\frac{7}{12}$

ا) 1 ب) 2 ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = -\sin\theta + i\cos\theta$ هو

ا) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ب) $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ج) $e^{i(\pi-\theta)}$

- العدد : $(1+i)^{1442}$ يساوي

ا) 2^{721} ب) $i\,2^{721}$ ج) $2^{721}(1+i)$

التمرين الثالث (4.5 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) التالية $2021x - 2020y = 5 \quad ....(E)$

ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0[5]$

ج) استنتج حلا خاصا $(x_0\,,y_0)$ حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5\,[2020] \\ a \equiv 0\,[2021] \end{cases}$

3/ ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

ج) عين الثنائيات $(x\,,y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $]0\,;\,+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x+1)lnx$

1/ ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

ب) بين انه من اجل كل x من $]0\,;\,+\infty[$ $g'(x) < 0$

ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II - f الدالة المعرفة على $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o.\vec{i}\,;\vec{j})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل $1cm$ و على محور التراتيب $4cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا

2/ ا) بين انه من اجل كل x من $]0\,;\,+\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

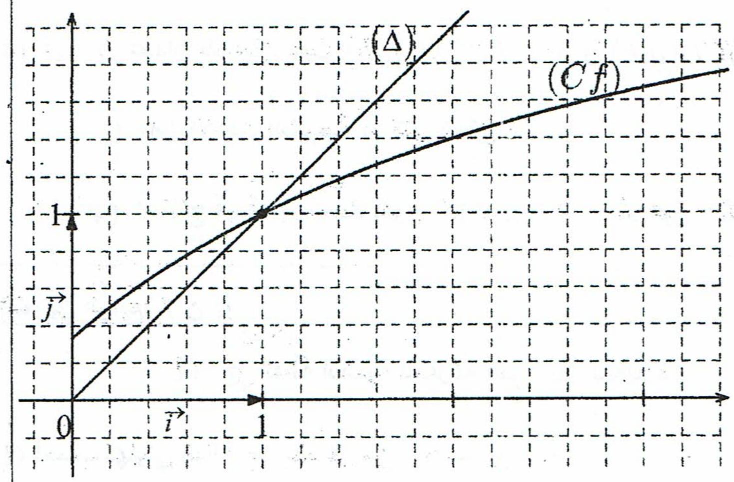
انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.



α عدد حقيقي موجب . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+......+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث: $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+.....+\ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني(4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 0 ، 0 ، 1 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 4 كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون
B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020
C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله
ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X
ج) احسب احتمال الحدث : $|X-1|=1$

التمرين الثالث(4,5 ن):

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

3) بين أن العدد 131 أولي

4) a و b عددان طبيعيان حيث $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$

أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7<n<15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a,b)

التمرين الرابع(7 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$

1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+3-xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أ - بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)

3) أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4) أ - بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب α و β حيث:

$-3,05<\alpha<-3$ و $0,75<\beta<0,8$

ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=x+m$

6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

تصحيح بكالوريا تجريبي 2021
3 ع م - الرياضيات

الموضوع الاول

التمرين الاول (4,5 ن)

① (v_n) هندسية حدودها موجبة تماما حدها الاول v_0 و أساسها q

$$\begin{cases} \ln v_0 + \ln v_2 = 2\ln 2 \\ e^{v_0} \times e^{v_1} = e^6 \end{cases}$$

① حساب v_0 ، v_1 و q

$\ln v_0 + \ln v_2 = 2\ln 2$ يعني $v_1^2 = 4$

ومنه $\boxed{v_1 = 2}$

$e^{v_0} \times e^{v_1} = e^6$ يعني $v_0 + v_1 = 6$

ومنه $\boxed{v_0 = 4}$

اذن $q = \frac{v_1}{v_0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

ب) $v_n = v_0 q^n = \boxed{4\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

جـ) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ / $-1 < \frac{1}{2} < 1$

د) $S_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$

$\ln v_n = (-\ln 2)n + \ln 4$

نضع $w_n = (-\ln 2)n + \ln 4$

(w_n) حسابية فيها $w_0 = \ln 4$ ، $r = -\ln 2$

$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

$= \frac{n+1}{2}\left[(-\ln 2)n + 2\ln 4\right]$

② $u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10}$ ، $u_0 = 6$

أ) البرهان $6 \le u_n \le 10$

من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 6$ ، $6 \le u_0 \le 10$

ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة : $6 \le u_n \le 10$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $6 \le u_{n+1} \le 10$ ؟

لدينا $6 \le u_n \le 10$ ومنه $54 \le 9u_n \le 90$

ومنه $64 \le 9u_n + 10 \le 100$

$8 \le \sqrt{9u_n + 10} \le 10$ ، $6 \le 8$

$6 \le u_{n+1} \le 10$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $6 \le u_n \le 10$

(u_n) محدودة

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 9u_n + 10}{\sqrt{9u_n + 10} + u_n}$

$-x^2 + 9x + 10 = 0 \leftarrow x = u_n$

$x_1 = -1$ ، $x_2 = +10$

u_n	$-\infty$	-1	6	10	$+\infty$
$-u_n^2 + 9u_n + 10$	$-$	0	$+$	0	$-$

$u_{n+1} - u_n > 0$ منه (u_n) متزايدة تماما

* (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ 10

فهي متقاربة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n

$10 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

$10 - u_{n+1} = \frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}(10 - u_n)$

لدينا $6 \le u_n \le 10$ منه $64 \le 9u_n + 10 \le 100$

منه $8 \le \sqrt{9u_n + 10} \le 10$

منه $8 \le \sqrt{9u_n + 10}$ أي $18 \le 10 + \sqrt{9u_n + 10}$

ومنه $\frac{1}{18} \ge \frac{1}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}$ أي

أي $\frac{9}{18} \ge \frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}$

$\frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}} \le \frac{1}{2}$

$\frac{9}{10 + \sqrt{9u_n + 10}}(10 - u_n) \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

$10 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(10 - u_n)$

د) $0 \le 10 - u_n \le v_n$

$u_n \le 10$ منه $\boxed{0 \le 10 - u_n}$

$10 - u_n \le v_n$ ؟

$10 - u_1 \le \frac{1}{2}(10 - u_0)$

$10 - u_2 \le \frac{1}{2}(10 - u_1)$

$\vdots$

$10 - u_n \le \frac{1}{2}(10 - u_{n-1})$

$(10 - u_1)(10 - u_2)\dots(10 - u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (10 - u_0)(10 - u_1)\dots(10 - u_{n-1})$

$\frac{\cancel{(10 - u_1)}\cancel{(10 - u_2)}\dots(10 - u_n)}{\cancel{(10 - u_1)}\cancel{(10 - u_2)}\dots\cancel{(10 - u_{n-1})}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (10 - u_0)$

$10 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$

$10 - u_n \le v_n$

ومنه $0 \le 10 - u_n \le v_n$

هـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

حسب مبرهنة الحصر

$\lim\limits_{n\to+\infty} 10 - u_n = 0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10}$

التمرين الثاني (4 ن)

① $U_1 \leftarrow$ 6 حمراء و 4 سوداء

$U_2 \leftarrow$ 3 حمراء ، 1 زرقاء

نسحب كرية من U_1 و كرية من U_2

عدد الحالات الممكنة $C_{10}^1 \times C_4^1 = 40$

X يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة

أ) القيم الممكنة للمتغير X هو $\frac{2}{5}$

X يأخذ القيم $\{1, 0\}$ وقانون احتماله

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	24/40	16/40

$P(X = 0) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{40} = \frac{24}{40}$

$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{40} = \frac{16}{40}$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

ب) نضيف n سوداء لـ U_1 فتصبح

6 حمراء و $n+4$ سوداء

و n حمراء لـ U_2 فتصبح

$n+3$ حمراء و 1 زرقاء

نسحب كرية من U_1 و U_2

عدد الحالات الممكنة $C_{n+10}^1 \times C_{n+4}^1$

$= (n+10)(n+4)$

$= n^2 + 14n + 40$

A: الكريتين تحملان نفس اللون

$P(A) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_{n+4}^1 \times C_{n+3}^1 + C_{n+4}^1 \times C_1^1}{n^2 + 14n + 40}$

$= \frac{6 + (n+4)(n+3) + n + 4}{n^2 + 14n + 40}$

$= \frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40}$

$P(A) = \frac{7}{12}$ أي $\frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40} = \frac{7}{12}$

أي

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$\Delta = 324$ ، $n = -\frac{8}{5}$ ، $n = 2$

(ب)

2) $Z = -\sin\theta + i\cos\theta$ شكله

الأسي هو

$Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ ، $-\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ لأن

جـ) العدد $(1+i)^{1442} = i\,2^{721}$

لأن $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$(1+i)^{1442} = (\sqrt{2})^{1442}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442}$

$= 2^{721}\left(e^{i\frac{1442\pi}{4}}\right)$

$= 2^{721}\left(\cos\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right)i\right)$

$= 2^{721}(0 + i) = \boxed{i\,2^{721}}$

التمرين 3 (4 ن)

(E) $2021x - 2020y = 5$

① أ) $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$

$2021 = 43 \times 47$

$PGCD(2020, 2021) = 1$

اذن 2020 ، 2021 أوليان فيما بينهما

* بما أن 1 يقسم 5 فإن (E) تقبل حلولا

ب) (x, y) حل لـ (E) أي $2021x - 2020y = 5$

منه $2021x = 2020y + 5$

$2021x = 5[404y + 1]$

أي $2021x \equiv 0[5]$ ، 2021 أولي مع 5

ومنه $x \equiv 0[5]$

جـ) (x_0, y_0) حل خاص لـ (E) يحقق

$2022 \le x_0 \le 2027$

$x \equiv 0[5]$ يعني $x = 5k$

ومنه $2022 \le 5k \le 2027$

أي $404,4 \le k \le 405,4$ ، $\boxed{k = 405}$

ومنه $\boxed{x_0 = 2025}$ ، $2021(2025) - 2020y_0 = 5$

نجد $\boxed{y_0 = 2026}$ حل المعادلة

ومنه نجد $\begin{cases} 2021x - 2020y = 5 \\ 2021(2025) - 2020(2026) = 5 \end{cases}$

$2021(x - 2025) =$

$= 2020(y - 2026)$

ومنه $2021 \mid 2020(y-2026)$ و $2021 \wedge 2020 = 1$ حسب غوص

$y-2026 = 2021k$ أي $2021 \mid y-2026$

أي $\boxed{y = 2021k+2026}$

ومنه $2021(x-2025) = 2020(2021k)$

أي $\boxed{x = 2020k+2025}$

$S = \{(2020k+2025\,;\,2021k+2026)\}$ ، $k \in \mathbb{Z}$

② نعين $\begin{cases} a \equiv 5 [2020] \\ a \equiv 0 [2021] \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2020\alpha + 5 \\ a = 2021\beta \end{cases}$

$2020\alpha + 5 = 2021\beta$

أي $2021\beta - 2020\alpha = 5$

$\beta = x = 2020k + 2025$

$\alpha = y = 2021k + 2026$

$a = 2020(2021k+2026)+5$

$= 4082420k + 4092525$

③ ندرس بواقي القسمة 5^n على 9

$5^0 \equiv 1 [9]$ ، $5^1 \equiv 5 [9]$ ، $5^2 \equiv 7 [9]$

$5^3 \equiv 8 [9]$ ، $5^4 \equiv 4 [9]$ ، $5^5 \equiv 2 [9]$

$5^6 \equiv 1 [9]$ البواقي دورية ودورها 6

$n =$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2 [9]

④ $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0 [9]$

$2021^{1962n+1954} \equiv 5^{1962n+1954} [9]$

$\equiv 5^{6\times 327n + 325\times 6+4} [9]$

$\equiv 5^{6\times 327n} \times 5^{325\times 6+4} [9]$

$\equiv 1 \times 4 [9]$

$\equiv 4 [9]$

$1442^{1440n+12} \equiv 2^{1440n+12} [9]$

$\equiv 2^{3(480n+4)} [9]$

$\equiv 8^{480n+4} [9]$

$\equiv (-1)^{480n+4} [9]$

$\equiv 1 [9]$

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv$

$\equiv 4+1+4 [9]$

$\equiv 0 [9]$

⑤ الثنائيات $(x;y)$ حلول (E) بحيث $5^{y-x} \equiv 8 [9]$

$5^{2021k+2026-2020k-2025} \equiv 8 [9]$

$5^{k+1} \equiv 8 [9]$

أي $k+1 = 6k'+3$

ومنه $\boxed{k = 6k'+2}$

$y = 2021(6k'+2) + 2026$

$= 12126k' + 6068$

$x = 2020(6k'+2) + 2025$

$x = 12120k' + 6065$

$S = \{(12120k'+6065\,;\,12126k'+6068)\}$ ، $k' \in \mathbb{N}$

التمرين ④ (ن7)

I) $g(x) = x+1-(2x+1)\ln x$

$D_g =]0;+\infty[$

① $g'(x) = 1 - 2\ln x - \frac{2x+1}{x}$

① $g''(x) = -\frac{2x+1}{x^2}$

$g''(x) = 0$ معناه $x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	||	+	0	−	

g' متزايدة تماما على $]0;\frac{1}{2}]$ ومتناقصة تماما على $[\frac{1}{2};+\infty[$

ب)

x	0		$1/2$		$+\infty$
$g''(x)$	||	+	0	−	
$g'(x)$	||	↗	$-3+2\ln 2$	↘	

$g'(\frac{1}{2}) = -3+2\ln 2 \simeq -1{,}61$

$g'(x) < 0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

إذن g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x} - 2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right]$

$= -\infty$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	||		−		
$g(x)$	||	$+\infty$	↘ 0	↘	$-\infty$

② $g(x) = 0$ لها حل وحيد $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1{,}83;1{,}84]$

$g(1{,}84) = -0{,}013$ ، $g(1{,}83) = 0{,}013$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ لها حل وحيد

$g(\alpha) = 0$ يحقق $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

③

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	+	0	−	

II)

$D =]0;+\infty[$; $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$

x	0		$+\infty$
x^2+x	||	+	

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} = 0 \times 0 = 0$

$x = 0$ م م ع و $y = 0$ م م أفقي

② $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$

$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

f متزايدة تماما على $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

③ $f(\alpha) = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$ نعلم أن $g(\alpha) = 0$

$\ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ بالتعويض نجد

$f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

$1{,}83 < \alpha < 1{,}84$ حصر $f(\alpha)$

ومنه $0{,}232 < f(\alpha) < 0{,}234$

④ (T) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1$

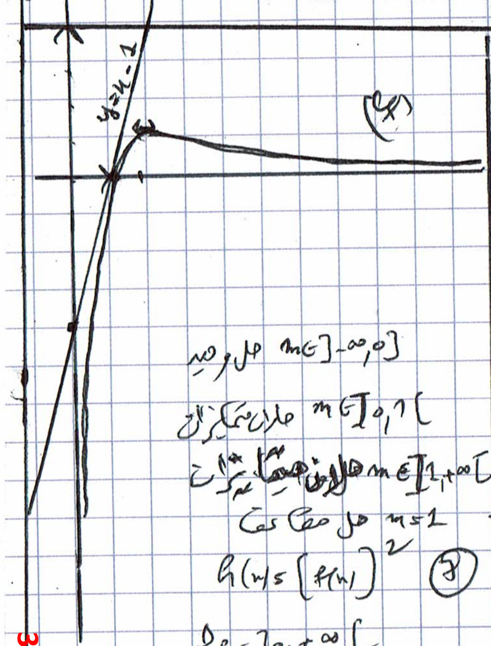
5) رسم (T) و (C_f)

⑥ المناقشة البيانية

$f(x) = mx - m$

ان حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx - m$

$m(1) - m = 0$ أو $A(1;0)$



إذا كان $m \in]-\infty;0]$ حل وحيد

إذا كان $m \in]0;1[$ حلان متمايزان

إذا كان $m \in]1;+\infty[$ ...

إذا كان $m = 1$ حل مضاعف

⑦ $h(x) = [f(x)]^2$

$D_h =]0;+\infty[$

$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

x	0	1		α	$+\infty$
$f'(x)$	||	+	+	0	−
$f(x)$	||	− 0	+		+
$2f'(x)f(x)$	||	− 0	+	0	−

h متناقصة تماما على $]0;1]$ و $[\alpha;+\infty[$

و h متزايدة تماما على $[1;\alpha]$

x	0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$	||	−	0	+	0	−	
$h(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$(f(\alpha))^2$	↘	0

تصحيح الموضوع 2 - باك تجريبي
- 2021 - تقني رياضي

التمرين الأول (4ن)

$D=[0,+\infty[$ $\quad f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

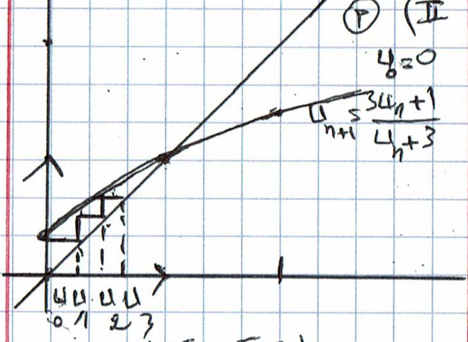
I) 1) (u_n) ثابتة يعني: $u_{n+1}=u_n$

لدينا $u_0=\alpha$ ، $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$

ومنه $\alpha=\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}$ أي $\alpha^2=1$

ومنه $\alpha=1$ لأن $\alpha\ge 0$

II) 1) $u_0=0$



2) (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 1

2) أ- من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n<1$

$n=0$: $u_0=0$ ، $0\le u_0<1$ صحيحة $p(0)$

نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

$p(n)$ صحيحة: $0\le u_n<1$ ، $p(n+1)$ صحيحة: $0\le u_{n+1}<1$ ؟

لدينا $0\le u_n<1$ و f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ومنه $f(0)\le f(u_n)<f(1)$

أي $\frac13\le u_{n+1}<1$ و $0\le\frac13$

ومنه $0\le u_{n+1}<1$

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n<1$ ، (u_n) محدودة

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\frac{1-u_n^2}{u_n+3}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$

لدينا $0\le u_n<1$ ومنه

$0<1-u_n\le 1$ / $1\le u_n+1<2$ / $3\le u_n+3<4$

$u_{n+1}-u_n>0$ و (u_n) متزايدة تماما

4) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة

3) $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) (v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+2}$

$v_{n+1}=\frac12\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac12 v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac12$ وحدها الأول

$v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$

ب) $v_n=v_0q^n=-1\left(\frac12\right)^n$

ج) $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ أي $v_nu_n+v_n=u_n-1$

ومنه $u_n(v_n-1)=-v_n-1$ ومنه $u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$

و $u_n=\frac{(\frac12)^n-1}{-1(\frac12)^n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{-1}=1$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac12\right)^n=0$

$-1<\frac12<1$

4) $S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+\frac{v_{2022}}{v_{2020}}+\dots+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{v_{2020}+v_{2021}+v_{2022}+\dots+v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{1}{v_{2020}}\left[v_{2020}\left(\frac{(\frac12)^n-1}{\frac12-1}\right)\right]$

$=-2\left(\left(\frac12\right)^n-1\right)=2-2\left(\frac12\right)^n$

$T_n=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\dots+\ln(|v_{n+2019}|)$

لدينا $\ln(|v_n|)=\ln\left|-1\left(\frac12\right)^n\right|=\ln\left(|-1|\left|\frac12\right|^n\right)$

$\ln(|v_n|)=\ln\left(\frac12\right)^n=n\ln\left(\frac12\right)=-n\ln2$

نضع $w_n=(-\ln2)n$ حيث (w_n) متتالية حسابية

أساسها $r=-\ln2$ وحدها الأول $w_0=0$

$T_n=w_n+w_{n+1}+\dots+w_{n+2019}$ / مجموع 2020 حد

$=\frac{2020}{2}\left[w_n+w_{n+2019}\right]$

$=1010\left[(-\ln2)n+(-\ln2)(n+2019)\right]$

$T_n=1010\left[(-2\ln2)n+(-\ln2)(2019)\right]$

التمرين 2 (4ن)

10 { 5 خضراء ← 2,2,1,1,0 ؛ 5 صفراء ← 2,2,1,0,0

سحب 4 كريات في آن واحد

$C_{10}^4=210$ عدد الحالات

1) A: 4 كريات من نفس اللون

$P(A)=\frac{C_5^4+C_5^4}{210}=\frac{1}{21}$

B: 4 كريات أرقامها تشكل العدد 2020

$P(B)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\frac{18}{210}=\frac{3}{35}$

C: 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

$0+1+1+2=4$ / $0+0+2+2=4$

$P(C)=\frac{C_3^2\times C_4^2+C_3\times C_3^2\times C_4}{210}=\frac{9}{35}$

2) X يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر

قيم X هي: 1 أو 2

يكون 1 هو الرقم الأكبر إذا كانت أرقامها من بين 1,1,1,0,0,0

$P(X=1)=\frac{C_6^4}{210}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$

ومنه $P(X=2)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	1/14	13/14

ب) الأمل

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=\frac{1}{14}+\frac{26}{14}=\frac{27}{14}$

ج) معناه $|X-1|=1$ ، $X-1=1$ أو $X-1=-1$

ومنه $X=2$ أو $X=0$ مرفوضة

$P(|X-1|=1)=P(X=2)=\frac{13}{14}$

التمرين 3 (4.5ن)

1) بواقي قسمة 2^n على 5

$2^0\equiv1[5]$ / $2^1\equiv2[5]$ / $2^2\equiv4[5]$ / $2^3\equiv3[5]$

$2^4\equiv1[5]$ البواقي دورية ودورها 4

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

2) باقي قسمة $(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1})$ على 5

لدينا $2014\equiv4[5]$ ومنه $2014\equiv2^2[5]$ إذن

$2014^{2n+1}\equiv(2^2)^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv2^{4n+2}[5]$

$\equiv4[5]$

$2016\equiv1[5]$ ومنه $2016^{8n}\equiv1[5]$ ومنه $2\times2016^{8n}\equiv2[5]$

$2017\equiv2[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv2^{4n+3}[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv3[5]$

إذن $2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv4-2+3[5]$

$\equiv0[5]$

الباقي هو: 0

3) $\sqrt{131}\simeq11{,}44$

131 لا تقبل القسمة على كل من 2, 3, 5, 7, 11

ومنه 131 عدد أولي

4) $d=PGCD(a,b)$ ، $m=PPCM(a,b)$

أ) $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

$d = PGCD(a,b) = 5$ تعني $a \times b = 5m$

منه يوجد a', b' عددان طبيعيان حيث

$PGCD(a',b') = 1$, $b = 5b'$, $a = 5a'$

لدينا $m = \frac{a \times b}{d} = a'b'd$

تعني $3m + 7d = 2^n - 48$

ومنه $3a'b'd + 7d = 2^n - 48$

أي $3(5a'b') + 7(5) = 2^n - 48$

أي $3(5a'b') + 7(5) + 48 = 2^n$

$2^n = 5[3a'b' + 7 + 9] + 3$

$2^n \equiv 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2^n \equiv 3[5]$ وحسب السؤال ① نجد

$\boxed{n = 4k+3}$

② $7 < n < 15$ تعني $7 < 4k+3 < 15$

أي $1 < k < 3$ منه $k = 2$ منه $n = 11$

إذن $2^{11} = 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2045 \equiv 5[3a'b' + 16]$

أي $a'b' = 131$, 131 عدد أولي

إذن $(a',b') = (1,131)$ أو $(131,1)$

منه $(a,b) \in \{(5,655),(655,5)\}$

التمرين ④ : (07ن)

I) $D = \mathbb{R}$ $g(x) = 1-(1+2x)e^{2x}$

① $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -[2e^{2x} + 2e^{2x}(2x+1)]$

$= (-4x-4)e^{2x}$

ومتزايدة على $]-\infty,-1]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-4x-4$	$+$	0	$-$

g متناقصة تماما على $[-1,+\infty[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-2}$	↘ $-\infty$

③ $g(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 3 - \frac12(2xe^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac3x - e^{2x}\right) = -\infty$

②أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x\to-\infty} -\frac12(2xe^{2x}) = 0$

ب) (Δ) معادلته $y = x+3$ مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

ج) الوضعية ، $f(x) - (x+3) = -xe^{2x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(Cf) فوق (Δ)	A	(Cf) تحت (Δ)

نقطة تقاطع $A(0,3)$

③ f قابلة للاشتقاق على IR ؛

$f'(x) = 1 - (e^{2x} + 2xe^{2x})$

$= 1 - (1+2x)e^{2x} = g(x)$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متزايدة على $]-\infty,0]$

f متناقصة على $[0,+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ $-\infty$

④ f مستمرة ورتيبة على $[-3{,}05,-3]$

$f(-3) = 0{,}0074$ $f(-3{,}05) = -0{,}043$

$f(-3{,}05) \times f(-3) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α حيث $-3{,}05 < \alpha < -3$

تحقق $\boxed{f(\alpha) = 0}$

- f مستمرة ورتيبة تماما على $[0{,}75,0{,}8]$

$f(0{,}8) = -0{,}16$ $f(0{,}75) = 0{,}388$

$f(0{,}75) \times f(0{,}8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد

$f(\beta) = 0$ حيث $0{,}75 < \beta < 0{,}8$

⑤ تعيين المماس (T) الموازي ل(Δ) :

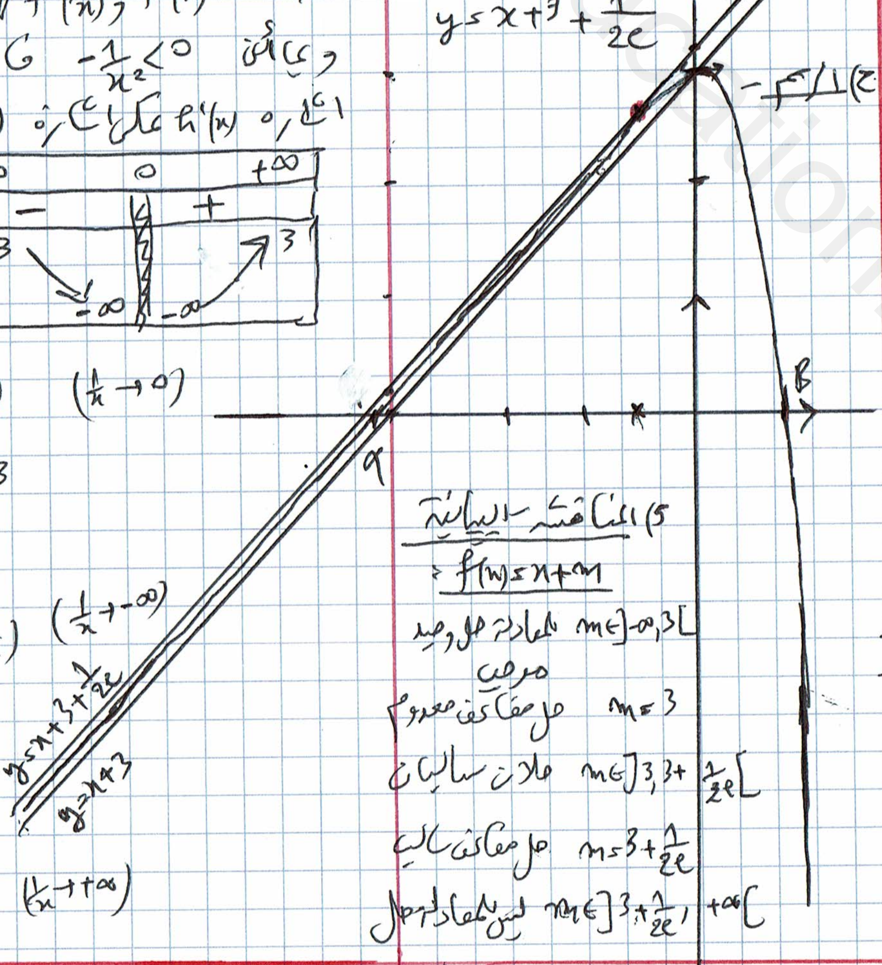
$f'(x) = 1$ أي $g(x) = 1$ أي $1 - (1+2x)e^{2x} = 1$

منه $-(1+2x)e^{2x} = 0$ أي $1 + 2x = 0$

منه $x = -\frac12$

$y = f'(-\frac12)(x + \frac12) + f(-\frac12)$

$y = x + 3 + \frac{1}{2e}$



5) المناقشة البيانية :

$f(x) = x + m$

$m \in]-\infty,3[$ المعادلة حل وحيد موجب

$m = 3$ حل مضاعف معدوم

$m \in]3,3+\frac{1}{2e}[$ حلان سالبان

$m = 3 + \frac{1}{2e}$ حل مضاعف سالب

$m \in]3+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حلول

⑥ $D = \mathbb{R}^*$ $h(x) = \frac{1+3x-e^{2/x}}{x}$

أ) h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$, $h(x) = f(\frac1x)$

لدينا $f(\frac1x) = \frac1x + 3 - \frac1x e^{2(\frac1x)}$

$= \frac{1+3x-e^{2/x}}{x} = h(x)$

$h(x) = f(\frac1x)$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac1x)$ (مشتقة دالة مركبة)

لدينا $\frac1x > 0$ لما $x > 0$ و $\frac1x < 0$ لما $x < 0$

منه $f'(\frac1x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة

وبما أن $-\frac{1}{x^2} < 0$

إذن $h'(x)$ عكس إشارة $f'(\frac1x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$+$
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 3

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac1x)$ $(\frac1x \to 0)$

$= f(0) = 3$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$

$\lim_{x \to 0^<} h(x) = \lim_{x\to 0^<} f(\frac1x)$ $(\frac1x \to -\infty)$

$= -\infty$

$\lim_{x \to 0^>} h(x) = \lim_{x\to 0^>} f(\frac1x)$ $(\frac1x \to +\infty)$

$= -\infty$