الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان الثلاثي الأول — يوم: 29 نوفمبر 2021

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي — المستوى: السنة الثالثة

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: ثلاث ساعات

التمرين الأول: 03 نقاط

✓ أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. المعادلة ذات المجهول x حيث $2(\ln x)^2 - \ln(x) - 1 = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما: 1 و e. 1

2. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0;1\}$ بـ: $f(x) = (x-1)\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x}\right|\right) - \ln(|x|)$. 1

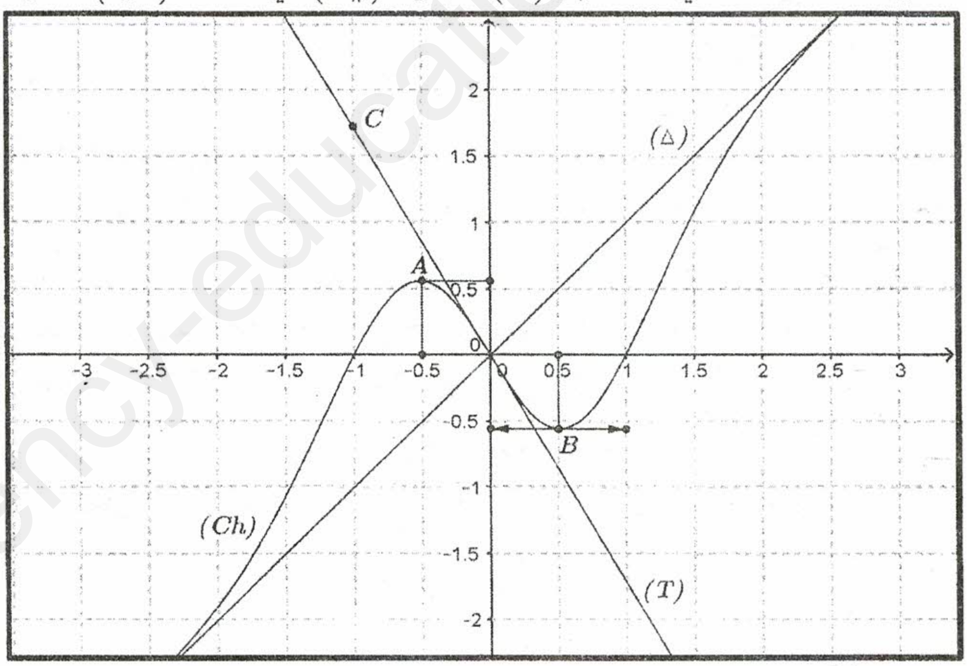
   ➢ من أجل $x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$ لدينا: $f(1-x) = f(x)$.

3. نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $(2e^x - 2e)(e^{1-x} - 1) > 0$. 1

   ➢ مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي: $]1;e[$.

التمرين الثاني: 07 نقاط

✓ في الشكل المقابل (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ و A، B، C ثلاث نقط حيث $A\left(-\dfrac{1}{2};0,56\right)$، $B\left(\dfrac{1}{2};-0,56\right)$، $C(-1;e-1)$ و (Δ)، (T) مستقيمان حيث (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_h) عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلة له هي $y = x$ و (T) المماس لـ (C_h) في النقطة $O(0;0)$ مبدأ المعلم.



I. **بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية:**

1. شكل جدول تغيرات الدالة h. 1
2. حدد كلا من $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و $h'(0)$ ثم أكتب معادلة للمماس (T). 1
3. حدد شفعية الدالة h مع التبرير. 0,8

---

4. استنتج الوضع النسبي لـ (C_h) والمماس (T) ثم فسر النتيجة هندسيا. 0,75

5. حدد حسب قيم x إشارة كلا من $h(x)$ و $h(x)-x$. 0,75

6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $h(x)=mx$. 0,75

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-h(|x|)$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. بين أن الدالة g زوجية ثم فسر النتيجة هندسيا. 0,5

2. أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم حدد طريقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_h). 1

3. أعد رسم (C_h) ثم أرسم (C_g). 0,5

التمرين الثالث: 10 نقاط

الجزء الأول: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(1-x)e^{1-x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g. 1,75

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,42<\alpha<0,44$. 0,75

ب) استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$. 0,25

الجزء الثاني: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x-xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$. 0,5

2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f. 0,25 0,5

ب) بين أن $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$. 0,75

ج) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا. 0,5

3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها. 0,5

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ). 0,75

4. أ) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له. 0,75

ب) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات. 0,75

5. أ) أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم أرسم (C_f) نأخذ $f(\alpha)=-0,33$. 0,75

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين. 0,25

6. أدرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(-x)$ دون تعيين عبارتها. 1

التصحيح النموذجي لاختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة ثانوي

الأقسام: ج ع ت + 3ر

الحاسبة:

حل التمرين الأول:

الحاسبة بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) خطأ: 0,25

التبرير: 0,75

لدينا المعادلة (1) تكافئ $2(\ln(x))^2 - \ln x - 1 = 0$ ①

لما أن $\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \text{ ②} \\ t = \ln x \end{cases}$ $\Delta = 9$ فإن المعادلة ② تقبل

حلين هما $\begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = 1 \end{cases}$ ومنه من أجل $t = -\frac{1}{2}$ فإن $\ln x = -\frac{1}{2}$ أي $x = e^{-\frac{1}{2}}$

ومن أجل $t = 1$ فإن $\ln x = 1$ أي $x = e$

وبالتالي المعادلة ① تقبل حلين هما: $x = e^{-\frac{1}{2}}$ و $x = e$

2) صحيح 0,25

التبرير: 0,75

لدينا

$$f(1-x) = (1-x-1)\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| - \ln|1-x|$$

$$= -x\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| - \ln|1-x|$$

$$= -x\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \ln|x-1|$$

$$= x\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \ln\left|x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$= x\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \ln|x| - \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$= (x-1)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \ln|x| = f(x)$$

وبالتالي من أجل $x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$ فإن $f(1-x) = f(x)$

3) خطأ 0,25

التبرير 0,75

لدينا $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)=0$ تكافئ أو

$2e^{x}-2e=0$ معناه $x=1$

$e^{1-x}-1=0$ معناه $e^{1-x}=e^{0}$ أي $x=1$

وعليه إشارة العبارة $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2e^{x}-2e$		$-$	0	$+$	
$e^{1-x}-1$		$+$	0	$-$	
$(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)$		$-$	0	$-$	

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)>0$ في $\mathbb{R}$

هي $S=\{\emptyset\}$

حل التمرين الثاني:

1

I) الإجابة على الأسئلة قراءة بيانية:

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة h:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,56$	$\searrow$	$-0,56$	$\nearrow$	$+\infty$

2) تحديد كل من $h'(\frac{1}{2})$ و $h'(0)$:

0,25

- $h'(\frac{1}{2})=0$ لأن المماس عند النقطة B موازي لحامل محور الفواصل

0,5

$h'(0)=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O}=\frac{e-1}{-1}=1-e$

كتابة معادلة للمماس (T):

0,25

$y=(1-e)x$

0,5

3) تحديد شفعية الدالة h مع التبرير:

الدالة h فردية لأن (C_h) متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم

0,5

4) استنتاج الوضع النسبي لـ (C_h) و المماس (T)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_h) أسفل (T)	(C_h) يقطع (T)	(C_h) أعلى (T)

0,25

التفسير الهندسي للنتيجة:

نقول أن النقطة $O(0;0)$ نقطة انعطاف لـ (C_h)

5) تحديد حسب قيم x إشارة كل من $h(x)$ و $h(x)-x$:

0,5

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)-x$		$+$	0	$-$	

6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

0,25x3

$h(x)=mx$

- من أجل $m\in]-\infty,1-e[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.
- من أجل $m\in]1-e,1[$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول حلين مختلفين في الإشارة وحل معدوم
- من أجل $m\in[1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.

II) لدينا $g(x)=-h(|x|)$

1) تبيان أن الدالة g زوجية:

0,25

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=-h(|-x|)=-h(|x|)$

$=g(x)$

ومنه الدالة g زوجية

0,25

التفسير الهندسي للنتيجة:

(C_g) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

0,5

2) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

لدينا
$$g(x)=\begin{cases}-h(x)\ ;\ x\geq 0\\ -h(-x)\ ;\ x\leq 0\end{cases}$$

تحديد مراحل رسم (C_g) انطلاقا من (C_h):

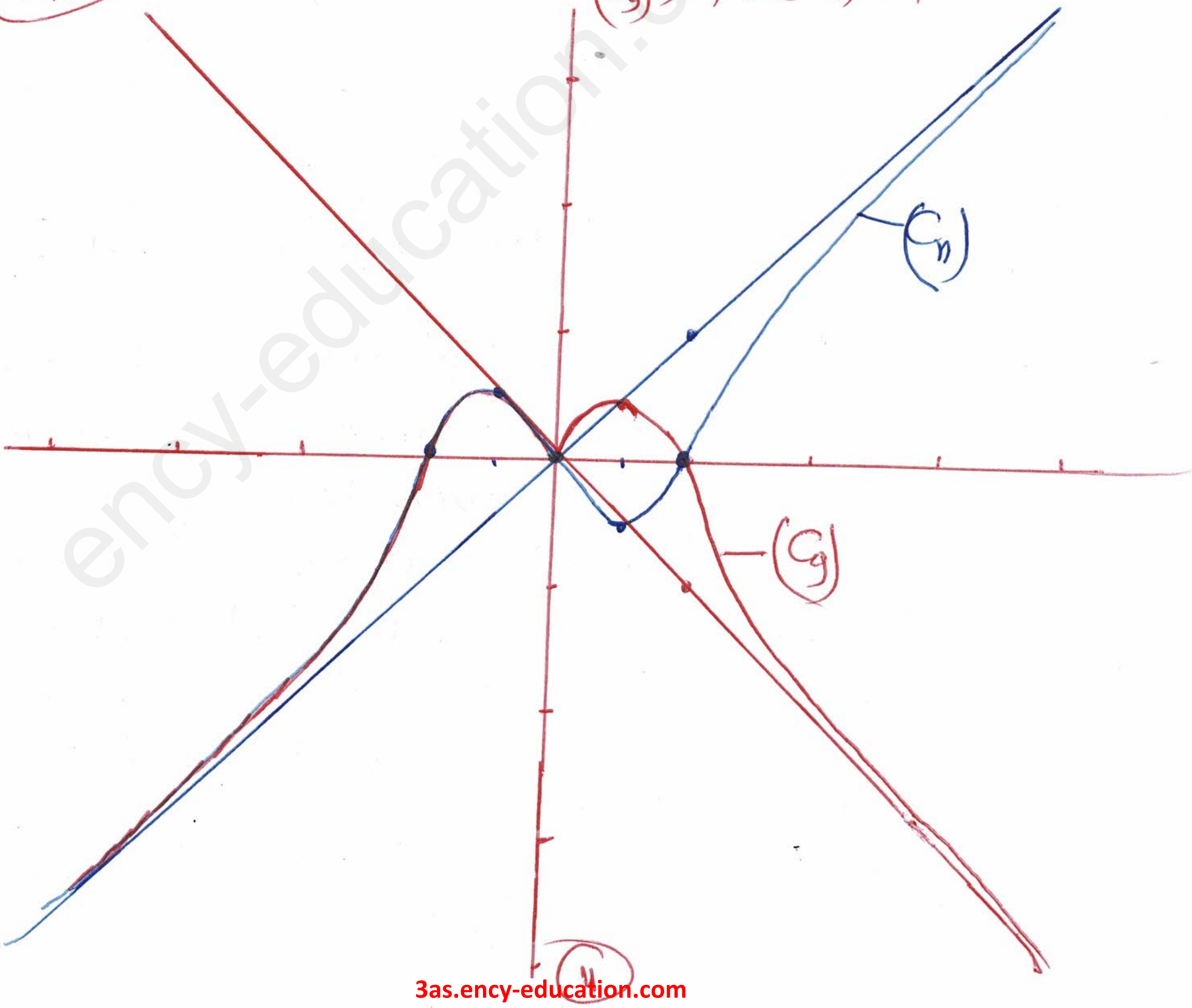
0,5

من أجل $x\geq 0$ فإن $g(x)=-h(x)$ ومنه (C_g) نظير (C_h) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0,+\infty[$

وبما أن الدالة g زوجية فإن (C_g) نظير جزء من (C_g) المرسوم في المجال $[0,+\infty[$ بالنسبة لحامل محور التراتيب:

0,5

3) اعادة رسم (C_h) ثم رسم (C_g)



حل التمرين الثالث:

الجزء الأول: لدينا $g(x)=1-(1-x)e^{1-x}$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات:

0,25 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1-(1-x)e^{1-x} = -\infty$

0,25 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1-e^{1-x}+\frac{x}{e^{x}}\times e = 1$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$:

0,25 $g'(x)=e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}$

ومنه $g'(x)=(2-x)e^{1-x}$

دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا $g'(x)=0$ تكافئ $2-x=0$ لأن $e^{1-x}\neq 0$ ومنه $x=2$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

0,25

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

0,25 استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty,2]$ ومتناقصة على المجال $[2;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

0,25

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-1}$	$\searrow$	1

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,42<\alpha<0,44$

0,75

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty,2]$ وبالخصوص على المجال $]0,42;0,44[$ و $g(0,42)\,g(0,44)<0$ لأن

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $0,42<\alpha<0,44$

هـ) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: لدينا $f(x)=x-xe^{1-x}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

0,25 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \overset{-\infty}{x}\left(1-e^{1-x}\right)^{-\infty}=+\infty$

0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x}\left(1-e^{1-x}\right)^{1}=+\infty$

2) أ) إثبات أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$:

0,5 لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1-e^{1-x}+xe^{1-x}$

وبالتالي: $f'(x)=1-(1-x)e^{1-x}=g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

ب) إثبات أن $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha-1}$

لدينا $f(\alpha)=\alpha-\alpha e^{1-\alpha}$ و $g(\alpha)=0$ أي $e^{1-\alpha}=\dfrac{+1}{1-\alpha}$

أي $e^{1-\alpha}=\dfrac{-1}{\alpha-1}$ ومنه $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{\alpha-1+1}{\alpha-1}=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha-1}$

وبالتالي: $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha-1}$

0,5

اعطاء حصر $f(\alpha)$:

لدينا $0{,}42 < \alpha < 0{,}44$ ومنه $1{,}42 < \alpha + 1 < 1{,}44$ ...(1)

و $-0{,}58 < \alpha - 1 < -0{,}56$ ومنه $-1{,}79 < \dfrac{1}{\alpha - 1} < -1{,}72$ ...(2)

نجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: $-0{,}37 < f(\alpha) < -0{,}28$

0,25

جـ) أحسب دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

لدينا $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$

0,25

التفسير الهندسي للنتيجة:

(C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α.

0,5

3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها:

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$

وعليه انطلاقا من اشارة $g'(x)$ نستنتج أن النقطة ذات الاحداثيات

$(e; f(e))$ أي $(e; e - e\,e^{-1})$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

0,25

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{e^x} \times e = 0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

0,5

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدينا $f(x) - x = 0$ تكافئ $x = 0$ لأن $e^{1-x} \neq 0$ وعليه الوضع النسبي نلخصه في الجدول التالي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x) - y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) أعلى (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) أسفل (Δ)

4) أ/ تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له: 0,75

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $g(x)=1$ وتكافئ $1-(1-x)e^{1-x}=1$

أي $(1-x)=0$ لأن $e^{1-x}\neq 0$ ومنه $x=1$

وعليه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 1

حيث $y=x-1$ معادلة له

ب) تعيين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات:

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $x(1-e^{1-x})=0$ أي $x=0$ أو $1-e^{1-x}=0$

0,5

معناه $e^{1-x}=e^{0}$ ومنه $x=1$ وعليه

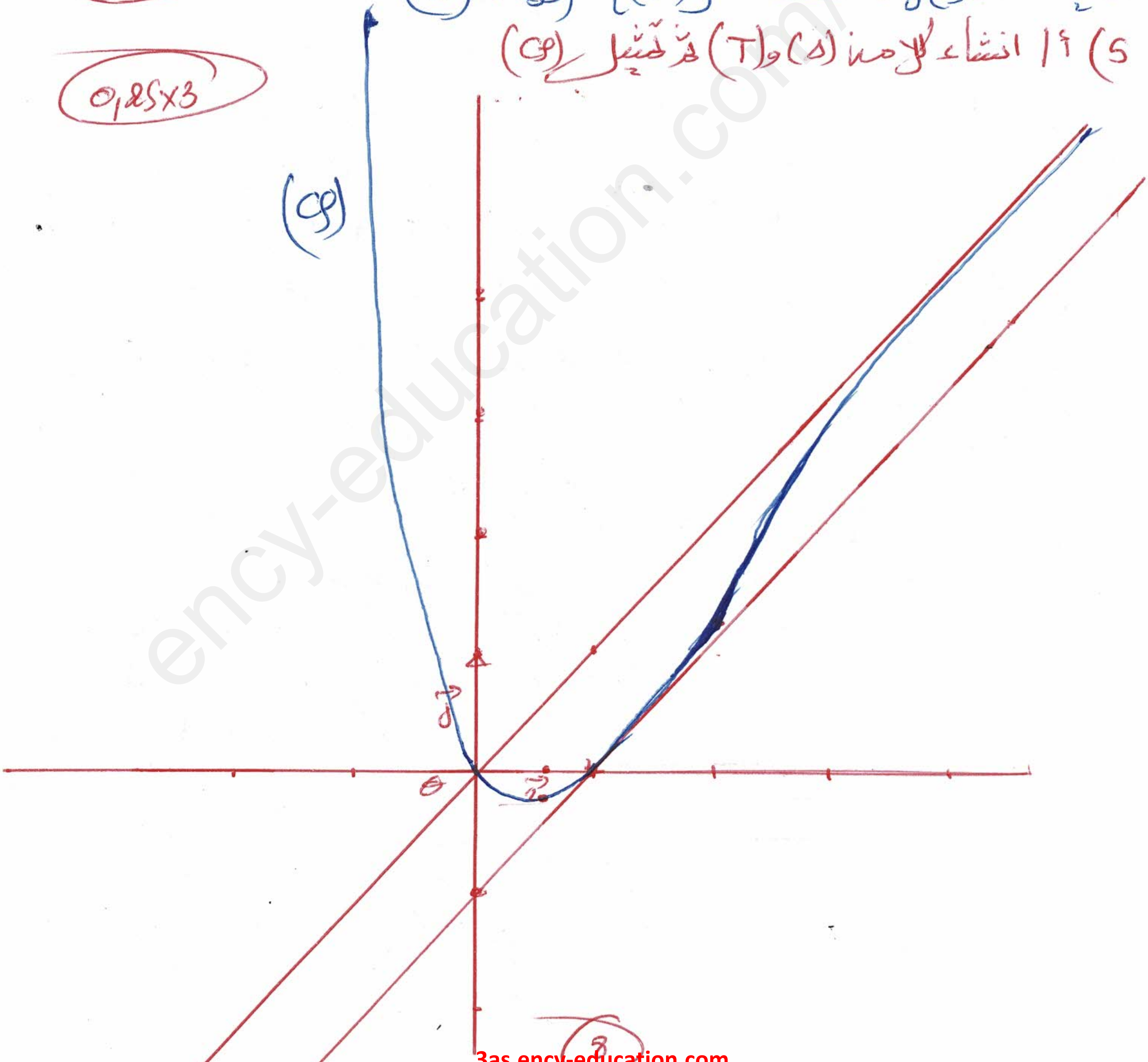
$(C_f)\cap(xx')=\{(0;0);(1;0)\}$

0,25

لدينا $f(0)=0$ ومنه $(C_f)\cap(yy')=\{(0;0)\}$

0,25×3

5) أ/ انشاء كلا من (Δ) و (T) ثم تمثيل (C_f)



5) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين.

لدينا من أجل $m \in]-1;0[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين (موجبين).

0,25

6) دراسة اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(-x)$ دون تعيين عبارتها.

0,25

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$: $h'(x)=-f'(-x)$ وعليه $h'(x)=0$

تكافئ $-f'(-x)=0$ أي $g(-x)=0$ ومنه $-x=\alpha$ أي $x=-\alpha$

ولدينا $h'(x)>0$ تكافئ $f'(-x)<0$ أي $g(-x)<0$ ومنه

$-x<\alpha$ أي $x>-\alpha$

وعليه إشارة $h'(x)$ تكون كالتالي:

0,5

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

0,25

ومنه الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة على المجال $[-\alpha;+\infty[$.