الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الثانويات :زريمش عيسى(حمام دباغ) - هواري بومدين (عين احساينية)

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة : ماي 2014

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1. أحسب الحدود u_2 ; u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2. أ - بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n \leq n + 3$.

ب - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ مستنتجا اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = u_n - n$.

* بين أن (v_n) متتالية هندسية ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = n + (\sqrt{e} - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$

* أحسب المجموعين: S_n و S'_n بدلالة n ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقطتين $A(3;-1;2)$ و $B(1;1;-2)$ والمستوي (p) معادلته الديكارتية : $x - 2y + 3z + 8 = 0$ و النقطة G معرفة بـ : $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{O}$

1. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (p).

2. أ- عين طبيعة و عناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|$

ب - أحسب المسافة بين النقطة G و المستوي (p) و استنتج الوضعية النسبية بين المجموعة (E) و المستوي (p).

3. أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G و يعامد المستوي (p) ثم عين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (p) و المستقيم (Δ).

ب. استنتج المسافة بين النقطة L و المستقيم (Δ).

4. أ. بين أن التمثيل الوسيطي للمستوي (AGH) هو : $\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + 3\beta \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \end{cases}$ حيث α و β عددان حقيقيان و أن معادلته الديكارتية هي : $x - y - z - 2 = 0$

ب - أثبت أن المستويين (p) و (AGH) متقاطعان وفق مستقيم يطلب كتابة تمثيله الو سيطي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1 . نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z)=z^3-5z^2+8z-6$

تحقق أن : $p(3)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

2 . المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A;B;C$ و D التي لواحقها على الترتيب

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2z_B$ ، $z_D=Re(z_C+z_A)$.

أ - بين أن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

ب - أحسب $\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_A-z_D}\right)$ ، فسر النتيجة هندسيا .

ج - عين z_D ، لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معين.

3 . نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ من المستوي النقطة $M'(Z')$ حيث: $z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$

أ- عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

ب - عين لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T ثم بين أن المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان

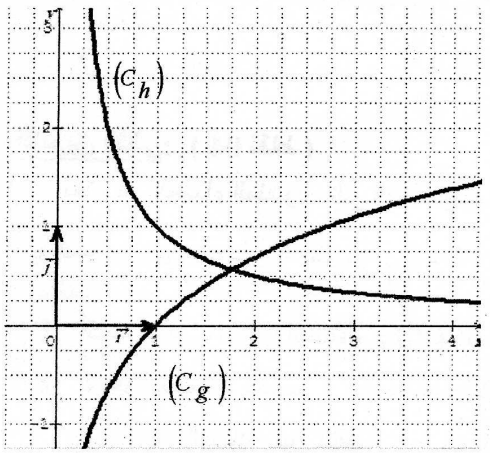
4 . أ- θ عدد حقيقي .عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z-z_C=z_A\overline{z_A}e^{i\theta}$ لما θ يتغير في $\mathbb{R}$

ب - عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث: $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، g و h دالتان معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln x$ و $h(x)=\frac{1}{x}$. (C_g) و (C_h) منحنييهما على الترتيب يتقاطعان في نقطة فاصلتها α . **(كما هو موضح في الشكل المرفق)**

1 . أ - عين بيانيا الوضعية النسبية للمنحنيين (C_g) و (C_h) .



ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة الفرق: $\frac{1}{x}-\ln x$

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1-x)\ln x+x$

1. أ - أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند 0 ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب - بين أن : $f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{\alpha}-1$.

2. أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب - ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 ، x_2 حيث : $0,4<x_1<0,5$ و $3,8<x_2<3,9$.

ب - بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=\frac{3}{4}$ معادلته من الشكل: $y=\left(\frac{4}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)x+\ln\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$

جـ - أرسم المنحنى (C_g) و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f ، بفرض $\alpha\approx 1,8$.

4. بين أن الدالة: $x\mapsto\left(-x+\frac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x$ هي دالة أصلية على $]0;+\infty[$ للدالة f .

III) لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $k(x)=f(|x|)$

بين كيف يمكن رسم (C_k) منحنى الدالة k انطلاقا من المنحنى (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{ln(x)}$ والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1 / باستعمال التمثيل البياني للدالة f ، مثل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$.

2 / أعط تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n)

3 / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$.

4 / أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty[$.

5 / لحساب نهاية المتتالية (u_n) أثبت أن : $f(l)=l$ ثم استنتج قيمة l .

التمرين الثاني : (05 ن)

I) **1 /** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2 / استنتج حلول المعادلة : $\left(\overline{z}+2+2\sqrt{3}i\right)^2-2\overline{z}-4\sqrt{3}i=0$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ ،نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=1-\sqrt{3}i$ ، $z_C=-1+\sqrt{3}i$ و $z_D=-1+3\sqrt{3}i$

1 / أ * أوجد زاوية ونسبة التشابه المباشر f الذي مركزه B ويحول C إلى A ، ثم أعط عبارته المركبة

ب * عين إحداثيات D' صورة D بالتشابه f ، ثم استنتج أن المثلثين BCD ، BAD' متشابهين .

2 / نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M(z')$ حيث : $2z'=2\left(-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)z-1$

أ / أكتب العدد α حيث : $\alpha=-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي

ب / عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

جـ / عين العبارة المركبة للتحويل $T\circ f$

3 / أ / بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $2(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}=0$ هي دائرة مركزها Ω ذات اللاحقة 2- ويطلب تعيين نصف قطرها

ب / عين صورة الدائرة (Γ) بالتحويل $T\circ f$

التمرين الثالث: (05 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ولتكن النقط $A(2;1;1)$ ، $B(-2;1;-1)$ ، $C(0;2;1)$ ، والمستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t-1 \\ z=-t+4 \end{cases}$ ..... $t\in\mathbb{R}$

- **اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل:**

1 . المستقيم (T) الذي يشمل النقطتين A و B والمستقيم (Δ) هما :

أ / متوازيان ب / ليسا من نفس المستوي جـ / متقاطعان

2 . المستقيم (Δ) يقطع المستوي (xoy) في النقطة :

أ / $D(0;0;-3)$ ب / $D(0;0;3)$ جـ / $D(-6;3;0)$.

3 . المسقط العمودي H للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC على المستقيم (Δ) إحداثياتها هي :

أ / $H\left(\frac{-4}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ ب / $H\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ جـ / $H\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3};\frac{7}{3}\right)$

4 . (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-3$ هي :

أ / سطح كرة مركزها $\omega(0;1;0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$ ب / مستوي يشمل A وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$ جـ / مجموعة خالية

5 . (E') مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $-2MA^2+MB^2+MC^2=25$

أ / سطح كرة مركزها A ونصف قطرها AB ب / مجموعة خالية جـ / مستوي يشمل A و $\vec{v}(-6;1;-2)$ شعاع ناظمي له

التمرين الرابع : (06 ن)

I) نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=xe^x-1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 / أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ثم فسر هذه النهاية تفسيرا هندسيا .

2 / أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;+\infty[$ ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3 / بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.56;0.57[$.

4 / استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

5 / أرسم (C_g) .

6 / m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-xe^x+1=e^m$ في $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x)=(ax+b)e^x-x$.

1 / عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

2 /استنتج اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$.

3 / بين أن منحنى الدالة G يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها .

III) ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة $x\mapsto e^x$ و (P) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\ln x$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. و ليكن x عدد حقيقي موجب تماما . M نقطة من (Γ) فاصلتها x و N نقطة من (P) فاصلتها x (لدينا $e^x>\ln x$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x) .

1 / أثبت أن $MN=e^x-\ln x$.

2 / نضع من أجل كل عدد x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=MN$.

أ * أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ب * استنتج أن المسافة MN تكون أقصر ما يمكن لما $x=\alpha$ ثم عين حصرا للمسافة MN (في هذه الحالة) .

3 / باستعمال الجزء I) بين أن $e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$.

4 / استنتج أن المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α و المماس لـ (P) عند النقطة ذات نفس الفاصلة متوازيان .

الموضوع الأول: التمرين الأول: (04)

$u_1=\sqrt{e}\approx 1,65$ و من أجل $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1. حساب الحدود u_2 ; u_3 و u_4: (0.75)

$u_2=\frac{2u_1+4}{3}=2,43$

$u_3=\frac{2u_2+5}{3}=3,29$ و $u_4=\frac{2u_3+6}{3}=4,19$

التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ (0.25)

2.أ- نبين بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

لتكن الخاصية $p(n)$: من أجل $n\geq 1$, $u_n\leq n+3$.

- من أجل $n=1$: لدينا $u_1\leq 4$ محققة ($u_1=\sqrt{e}\approx 1,65$)

ومنه: $p(1)$ صحيحة . (0.5)

- **نفرض صحة الخاصية** $p(n)$ **و نبرهن صحة** $p(n+1)$:

أي نبرهن: $u_{n+1}\leq n+4$ علما أن: $u_n\leq n+3$...(1)

بضرب طرفي المتباينة (1) في $\frac{2}{3}$ نجد: $\frac{2}{3}u_n\leq \frac{2}{3}n+2$...(2)

بإضافة $\frac{1}{3}n+1$ إلى طرفي المتباينة (2) نجد:

$u_{n+1}\leq n+3\leq n+4$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq \frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$

إذن: الخاصية $p(n+1)$، نستنتج $u_n\leq n+3$

ب - نبين أنه من أجل كل $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ (0.25)

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

بما أن $u_n\leq n+3$ فإن: $n+3-u_n\geq 0$

إذن: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)\geq 0$ (0.25)

نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$ (التخمين صحيح)

3 .نبين أن (v_n) متتالية هندسية: (0.5)

لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$ ، (v_n) م .هـ أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$ و $v_n=v_1q^{n-1}=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

* نبين أنه من أجل $n\geq 1$: $u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا: $v_n=u_n-n$ ومنه: $u_n=v_n+n=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$ (0.5)

4. حساب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ثم تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$:

بما أن: $q=\frac{v_2}{v_1}=\left(\frac{2}{3}\right)q$ و $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2}{\left(\frac{2}{3}\right)v_1}=\frac{v_3}{v_2}=\left(\frac{2}{3}\right)q$ و $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3v_3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2}$

فإن S_n مجموع حدود م.هـ أساسها: $\left(\frac{2}{3}\right)q=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)$

$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+....+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1v_1\left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right)$

ومنه: $S_n=\frac{6}{5}\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$ ، (0.25)

لدينا: $u_n=v_n+n$ و $S'_n=u_1+u_2+....+u_n$ (0.5)

$S'_n=(v_1+1)+(v_2+2)+....+(v_n+n)=(v_1+v_2+..+v_n)+(1+2+..+n)$

$S'_n=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n}{2}(1+n)=3\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+\frac{n}{2}(1+n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(3\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+\frac{n}{2}(1+n)\right)}{n^2}=\frac{1}{2}$ (0.25)

التمرين الثاني: (04)

1. كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) ثم تعيين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوى (p):

$\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$ (0.25)

$(AB):\begin{cases}x=1-2\lambda\\y=1+2\lambda\\z=-2-4\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$ أو $(AB):\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=2-4\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$ ،

$\vec{n}(1;-2;3)$ ناظمي لـ (p)، بما أن $\overrightarrow{nAB}=1(-2)+(-2)(2)+3(-4)\neq 0$

فإن الشعاعين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$ غير متعامدان.

ومنه: (AB) يقطع (p) في النقطة $L(x,y,z)$

$\lambda=\frac{1}{18}$ ومنه: $0=8+3(-2-4\lambda)-2(1+2\lambda)+3(1-2\lambda)$

أو $0=8+3(-2-4\lambda)-2(1+2\lambda)+3(1-2\lambda)$ ومنه: $\lambda=\frac{19}{18}$

إذن: $L\left(\frac{8}{9},\frac{10}{9},\frac{-20}{9}\right)$ (0.5)

2.أ- تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{O}$ ، بمأن: $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

و $3-1\neq 0$ فإن G مرجح الجملة $\{(A,3);(B;-1)\}$ (0.5)

$M\in(E)$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ معناه $2\overrightarrow{MG}=\left\|-\overrightarrow{AB}\right\|$

ومنه: $MG=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{24}}{2}=\sqrt{6}$، إذن: (E) هي سطح كرة مركزها النقطة $G(4;-2;4)$ و نصف قطرها $R=\sqrt{6}\approx 2,45$.

ب - حساب المسافة بين النقطة G و المستوى (p) (0.25)

$d(G;(p))=\frac{|x_G-2y_G+3z_G+8|}{\sqrt{14}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}\approx 7;48$

استنتاج الوضعية النسبية بين سطح الكرة (E) والمستوى (p)

بمأن $d(G,(p))\approx 7;48>R=\sqrt{6}$ فإن $(p)\cap(E)=\varnothing$ (0.25)

أ. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G و يعامد (p) ثم تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع (p) و (Δ):

$(\Delta): \begin{cases} x=4+1\lambda' \\ y=-2-2\lambda';\lambda'\in\mathbb{R} \\ z=4+3\lambda' \end{cases}$ و $(4+\lambda')-2(-2-2\lambda')+3(4+3\lambda')+8=0$ (0.25)

ومنه: $\lambda'=-2$ إذن: $H(2;2;-2)$ (0.5)

ب. استنتاج المسافة بين النقطة L و المستقيم (Δ):

$d(L;(\Delta))=LH=\sqrt{\frac{168}{81}}=\frac{2}{9}\sqrt{42}\approx 1,44$ أو (0.25)

$d(L;(\Delta))=LH=\sqrt{GL^2-d(G;(P))^2}=\sqrt{\frac{168}{81}}\approx 1,44$

4. أ. نبين أن المستوى (AGH) تمثيله الوسيطي هو: (0.5)

$\begin{cases} x=3+\alpha-\beta \\ y=-1-\alpha+3\beta;\alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ z=2+2\alpha-4\beta \end{cases}$ ومعادلته: $x-y-z-2=0$

بما أن $\frac{4}{2}\neq\frac{-3}{-1}\neq\frac{1}{1}$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AH}(-1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AG}(1;-1;2)$ غير مرتبطان خطيا ، ومنه: النقاط $A;G;H$ ليست في إستقامية

إذن:تعين المستوي (AGH) شعاعي توجيهه $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AG}$ ويشمل $A(3;-1;2)$ نستنتج أن تمثيله الوسيطي هو:

$\begin{cases} x=3+\alpha-\beta \\ y=-1-\alpha+3\beta;\alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ z=2+2\alpha-4\beta \end{cases}$ ، بماأن $\vec{n}'(1;-1;-1)$ عمودي على $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AG}$ $\left(\overrightarrow{AH}.\vec{n}'=0;\overrightarrow{AG}.\vec{n}'=0\right)$

$\begin{cases} x_A-y_A-z_A-2=0 \\ x_H-y_H-z_H-2=0 \\ x_G-y_G-z_G-2=0 \end{cases}$ (0.5)

إحداثيات النقاط $A;G;H$ تحقق معادلة المستوي (AGH)

فإن المعادلة الديكارتية للمستوي (AGH) هي: $x-y-z-2=0$

ب - إثبات أن المستويين (p) و (AGH) متقاطعان وفق مستقيم

يطلب كتابة تمثيله الو سيطي.:

بما أن $\vec{n}'(1;-1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (p) غير مرتبطان خطيا

فإن: (p) و (AGH) غير متوازيان.

و بالتالي متقاطعان وفق مستقيم معرف بالجملة (0.25)

$\begin{cases} x=5t+12 \\ y=4t+10;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+3z+8=0 \end{cases}$

التمرين الثالث: (05)

1. التحقق أن: $p(3)=0$ (0.25) ثم نحل المعادلة $p(z)=0$:

$p(3)=0$ معناه 3 جذر لـ $p(z)$ ومنه: $p(z)=(z-3)(z^2-2z+2)$

$p(z)=0$ معناه $(z-3)(z^2-2z+2)=0$

$\Delta=-4$ ومنه: $S=\{3;1-i;1+i\}$ (0.75)

2. أ - بين أن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها :

بما أن : $AD=|z_D-z_A|=|-2+i|=\sqrt{5}$ و $BD=|z_D-z_B|=\sqrt{5}$ و $CD=|z_D-z_C|=\sqrt{5}$ فإن $AD=CD=BD$

النقاط $A;B;C$ متساوية المسافة عن D (0.75)

ومنه: النقاط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ب - حساب $\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_A-z_D}\right)$ وتفسير النتيجة هندسيا :

$\frac{z_C-z_D}{z_A-z_D}=i$ ومنه: $\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_A-z_D}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ (0.5)

التفسير: بما أن $\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_A-z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $CD=AD$

فإن المثلث ACD قائم في النقطة D متساوي الساقين (0.5)

ج - تعيين $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معين: (0.5)

الرباعي $ADBD'$ معين معناه الرباعي $ADBD'$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان $BD=AD$.

لدينا: $BD=AD=\sqrt{5}$ وكذلك :

الرباعي $ADBD'$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{AD}$ معناه $z_B-z_{D'}=z_D-z_A$ معناه $z_{D'}=z_B-z_D+z_A$

ومنه: $z_{D'}=1-i-3+1+i=-1$

3. أ- عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة: (0.5)

لدينا: $T:M'(Z')\to M(Z)$ و $z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$

ومنه:العبارة المركبة للتحويل T هي $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z-2i=iz-2i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث a,b عددان مركبان $a\neq 0$

بما أن: $|a|=\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=1$ فإن: T هو دوران زاويته $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

ومركزه B النقطة الصامدة التي لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}=1-i=z_B$

ب - تعيين لاحقة النقطة E صورة O بالتحويل T :

لدينا: $z_E=e^{i\frac{\pi}{2}}z_O-2i=-2i$ ، $z_E=-2i$ (0.25)

نبين أن المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان: (0.25)

بماأن:صورة (AB) بالدوران T هي المستقيم $(A'B)$ حيث $T(A)=A'$

فإن (AB) عمودي على $(A'B)$ ولدينا $(A'B)$ يوازي (CE)

ومنه: المستقيمان (AB) و (CE) متعامدان.

4. أ- θ عدد حقيقي .تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z-z_C=z_A\overline{z_A}e^{i\theta}$ لما θ يتغير في $\mathbb{R}$

$z-z_C=z_A\overline{z_A}e^{i\theta}$ معناه $z=z_C+z_A\overline{z_A}e^{i\theta}=(2-2i)+2e^{i\theta}$

ومنه: المجموعة هي دائرة نصف قطرها 2 و مركزها النقطة C لاحقتها $z_C=2-2i$ (0.5)

ب ـ تعيين مجموعة النقط M من المستوى $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (0.5)

مع $k\in\mathbb{Z}$ لدينا: $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

المجموعة هي: [redacted] الدائرة التي قطرها $[AB]$ [redacted] باستثناء النقطتين A ; B

التمرين الرابع: (07)

1.أ. تعيين بيانيا الوضعية النسبية للمنحنيين (C_g) و (C_h):

x	0		α		$+\infty$
وضعية (C_h) و (C_g)		(C_h) تحت (C_g) (0.5)		(C_h) فوق (C_g)	
			متقاطعان		

ب ـ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة الفرق $\frac{1}{x}-\ln x$

x	0		α		$+\infty$
إشارة $\frac{1}{x}-\ln x$		$+$ (0.5)	ϕ	$-$	

II) 1.أ ـ حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند 0 : (0.5)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-\ln x+1\right)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ (0.25)

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته من الشكل: $x=0$

ب ـ نبين أن: $f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{\alpha}-1$ لدينا (0.5) $f(\alpha)=(1-\alpha)\ln\alpha+\alpha$ (*).

$\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}$ أي $\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha=0$ بالتعويض في (*) نجد $f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{\alpha}-1$

2.أ ـ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ (0.25)

$f'(x)=0$ معناه $x=\alpha$ ، $f'(x)>0$ معناه $x\in]0;\alpha[$

ومنه: الدالة f متزايدة تماما على المجال $x\in]0;\alpha[$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$ (0.5)

ومنه: الدالة f متناقصة تماما على المجال $x\in x\in[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ϕ	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	(0.5) ↗	$f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{\alpha}-1$	↘	$-\infty$

ب ـ دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)=x(1-\ln x)$ (0.5)

$f(x)-g(x)=x(1-\ln x)=0$ معناه $x=e$ أو $x=0$ مرفوض

x	0		e		$+\infty$
إشارة $f(x)-g(x)$		$+$	ϕ	$-$	
الوضعية بين (C_f) و (C_g)		(C_g) فوق (C_f)		(C_g) تحت (C_f)	

$(C_f)\cap(C_g)=\{A(e,1)\}$

3.أ ـ نبين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما: x_1 ، x_2 حيث: $0,4<x_1<0,5$ و $3,8<x_2<3,9$

$f(0,4)\approx-0,149$ و $f(0,5)\approx0,153$ و $f(0,4)\approx-0,149$ و $f(0,5)\approx0,153$

بما أن f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $[0,4;0,5]$ و $f(0,4)\times f(0,5)<0$ و كذلك معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على $[3,8;3,9]$ و $f(3,8)\times f(3,9)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين (01)

فاصلتيهما x_1 ، x_2 حيث: $0,4<x_1<0,5$ و $3,8<x_2<3,9$

ب ـ نبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=\frac{3}{4}$ معادلته من الشكل: $y=\left(\frac{4}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)x+\ln\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$

لدينا: $(T):y=f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$ و $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ (0.5)

و $f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}-\ln\frac{3}{4}$ ومنه: $(T):y=\left(\frac{4}{3}-\ln\frac{3}{4}\right)x+\ln\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ (0.25)

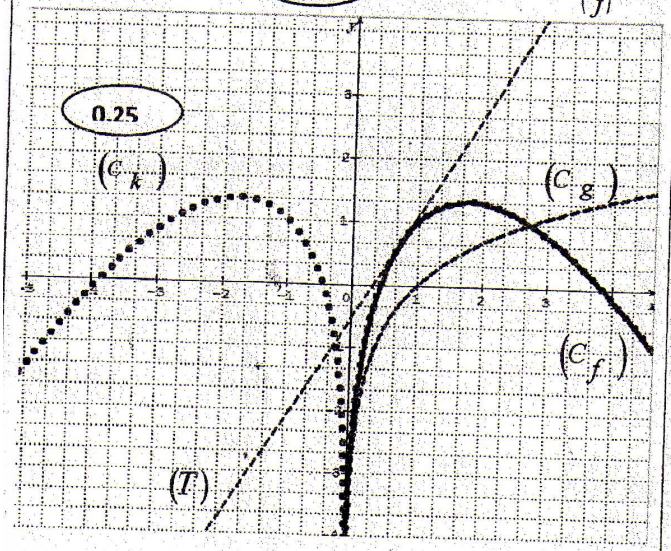
ج ـ رسم المنحنى (C_g) و (C_f) (0.25) بفرض $\alpha\approx1,8$:

4. نبين أن الدالة: $x\to\left(-x+\frac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x$ هي دالة أصلية على $]0;+\infty[$ للدالة: $x\to(1-x)\ln x$ (0.5)

بما أن الدالة $x\to\left(-x+\frac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $\left[\left(-x+\frac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x\right]'=(1-x)\ln x$

ومنه: الدالة $x\to\left(-x+\frac{3}{4}x^2\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x$ أصلية للدالة $x\to(1-x)\ln x$

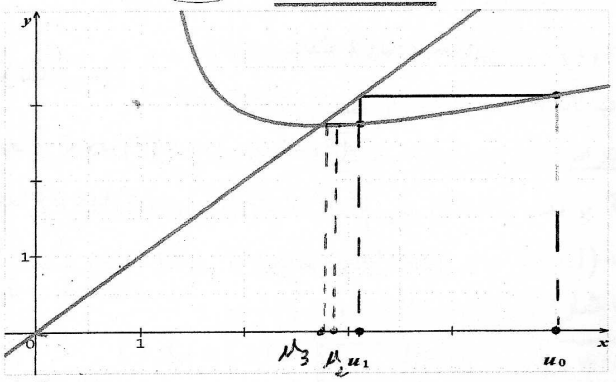
III) لدينا: $k(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x);x\in]0;+\infty[\\ f(-x);x\in]-\infty;0[\end{cases}$ ومنه (C_k) هو اتحاد بيانين الجزء الأول منطبق على (C_f) في المجال $]0;+\infty[$ والآخر نظير (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ (0.25)



التمرين الأول :

الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

1 / تمثيل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$. (0.5)



2 / التخمين : المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومقاربة (0.5)

3 / إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي : n أن :

$u_{n'} \geq e$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

❶ نبرهن أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

لدينا $u_0=5$ إذن $u_0 \geq e$ ومنه $P(0)$ صحيحة (1)

❷ نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن $u_n \geq e$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي أن $u_{n+1} \geq e$

لدينا $u_n \geq e$ و بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[e;+\infty[$ فإن : $f(u_n) \geq f(e)$

ومنه $u_{n+1} \geq e$ إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة

ومنه نستنتج حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$

د) نبين أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو l :

4 / اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n}{\ln U_n}-U_n=\frac{U_n(1-\ln U_n)}{\ln U_n} \leq 0$$

لأن : (0.5)

$U_n \geq e$

$-\ln U_n \leq -\ln e$

$1-\ln U_n \leq 0$

ومنه :المتتالية (u_n) متناقصة تماما

وبما أنها محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty[$. (0.5)

5)نهاية المتتالية (U_n) :

المتتالية متقاربة نحو l معناه : (0.5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} U_n=l$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(U_n)=f(\lim\limits_{x\to+\infty} U_n)=f(l)=l$ (لأن f مستمرة على المجال $]1;+\infty[$)

إيجاد l :

$f(l)=l$ (0.5)

$\dfrac{l}{\ln l}=l$ $\quad (l \in]e;+\infty[)$

$l=e$

التمرين الثاني :

I) 1 / حل المعادلة (1) : $z^2-2z+4=0$ (0.5)

$\Delta=-12=i^2 12=(i2\sqrt{3})^2; z_1=1+i\sqrt{3}; z_2=1-i\sqrt{3}$

2 / حل المعادلة (2) : $\left(\bar{z}+2+2i\sqrt{3}\right)^2-2\bar{z}-4i\sqrt{3}=0$ (2)

تكافئ $(\bar{z}+2+2i\sqrt{3})^2-2(\bar{z}+2+2i\sqrt{3})+4=0$ (0.5)

$\alpha^2-2\alpha+4=0$

من المعادلة (1) نجد: $\alpha=1+i\sqrt{3}$ أو $\alpha=1-i\sqrt{3}$

ومنه : نجد: $\begin{cases}\bar{z}+2+2i\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}\\ \bar{z}+2+2i\sqrt{3}=1-i\sqrt{3}\end{cases}$ أو $\begin{cases}z=-1+i\sqrt{3}\\ z=-1+i3\sqrt{3}\end{cases}$

وهي حلول المعادلة (2).

II) أ)إيجاد زاوية ونسبة التشابه S الذي مركزه B ويحول C الى A

$S(c)=A$ معناه $Z_A-Z_B=a(Z_C-Z_B)$

ومنه: $a=\dfrac{z_A-z_B}{z_c-z_B}=\dfrac{-\sqrt{3}i+3}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$ (1)

التشابه S مركزه B نسبته $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\theta=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

و لدينا $z_B=az_B+b$ معناه $b=z_B(1-a)=1$

إذن عبارته المركبة: $z'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}z+1$

ب) تعيين صورة D بالتشابه S :

$z_{D'}=\dfrac{-\sqrt{3}i+3}{4}(-1+3\sqrt{3}i)+1=\dfrac{5}{2}(1+i\sqrt{3})$ (0.25)

ج)استنتاج أن المثلثان BAD' و BCD متشابهان.

لدينا: $\begin{cases} S(B)=B \\ S(C)=A \\ S(D)=D' \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \dfrac{BA}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{BD'}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{AD'}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه :المثلثان BAD'وBCD متشابهان

2/ التحويل T عبارته: $2z'=2(-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})-1$

أ)كتابة العدد α على الشكل المثلثي و الأسي :

$\alpha=-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}$ (0.25)

$\alpha=-i(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ومنه عبارة التحويل T هي : $z'=e^{-\frac{\pi}{3}i}z-\frac{1}{2}$

ب)التحويل T دوران زاويته $\theta'=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومركزه Ω (0.5)

حيث: $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-1/2}{1-(1/2-\sqrt{3}/2\,i)}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3}i)$

ومنه: $\Omega(\frac{-1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4})$

ج) العبارة المركبة للتحويل ToS :

$ToS(M)=T(S(M))$

$z\xrightarrow{S}z'\xrightarrow{T}z''$

$z\xrightarrow{S}z'=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}z+1\xrightarrow{T}z''=e^{-\frac{\pi}{3}i}(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}z+1)-\frac{1}{2}$

ومنه: $z''=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}z-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (0.5)

3)أ. تعيين (Γ)مجموعة النقط M من المستوى الى تحقق :

$2(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}=0$ (0.5)

$2(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}=0$

$2\cdot 2x+x^2+y^2=0$ ومنه :

$(x+2)^2+y^2=4$

(Γ) هي دائرة مركزها ω لاحقها(-2) ونصف قطرها $r=2$

ب تعيين صورة (Γ)بالتحويل ToS:

$z_{w'}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot z_w-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $r'=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r=\sqrt{3}$

ومنه صورة (Γ) بالتحويل ToS هي الدائرة التي معادلتها:

(0.5) $x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3$

التمرين الثالث :

I) لدينا : $A(2;1;1);B(-2;1;-1);C(0;2;1)$

$\overrightarrow{AB}(-4;0;-2);\overrightarrow{AC}(-2;1;0)$

1) الإجابة ب :لأن المستقيم(T)يشمل النقطتين A ;Bتمثيله الوسيطي هو: $\begin{cases} x=-4\lambda+2 \\ y=1 \\ z=-2\lambda+1 \end{cases}$ حيث λ وسيط حقيقي (1)

شعاع توجيه(T)هو: $\overrightarrow{AB}(-4;0;-2)$

شعاع توجيه(Δ)هو: $\vec{v}(-2;1;-1)$

$\frac{0}{1}\neq\frac{-4}{2}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

نحل الجملة: $\begin{cases} -4\lambda+2=-2t+2 \\ 1=t-1 \\ -2\lambda+1=-t+4 \end{cases}$ نجد: $\begin{cases} \lambda=1 \\ t=2 \\ \lambda=\frac{-1}{2} \end{cases}$ ومنه

المستقيمان (T)و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

2)الإجابة ج :لأن معادلة المستوي (xoy)هي: $z=0$

بالتعويض في المثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد: $D(-6;3;0)$ (1)

3) الإجابة أ :لأن مركز ثقل المثلث ABCهي النقطة $G(0;\frac{4}{3};\frac{1}{3})$ مسقطها العمودي على المستقيم (Δ) هيH حيث

$\begin{cases} H(-2t+2;t-1;-t+4) \\ -2\cdot(-2t+2)+(t-\frac{7}{3})-(-t+\frac{11}{3})=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} H\in(\Delta) \\ \overrightarrow{GH}\cdot\vec{v}=0 \end{cases}$

نجد $t=\frac{5}{3}$ ومنه : $H(\frac{-4}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3})$ (1)

4) الإجابة أ :(E)مجموعة النقط Mمن الفضاء تحقق

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-3$ معناه

$(x-2)(x+2)+(y-1)(y-1)+(z-1)(z+1)=-3$

$x^2+(y-1)^2+z^2=2$ (1)

ومنه (E) هي سطح كرة مركزها $\Omega(0;1;0)$ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$.

5)الإجابة ج :(F)مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق:

$-2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=25$

$-2\overrightarrow{MA}^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})^2=25$

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=25$

$20+5+2\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=25$

$\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$ (1)

حيث : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{u}(-6;1;-2)$

إذن: $\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u}=0$ومنه مجموعة النقط (F)هي المستوى الذي

يشمل A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له

التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x)=xe^x-1$ ، $D_g=]-\infty;+\infty[$

1 / حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_g) موازٍ لمحور الفواصل .

2 / دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty;+\infty[$:

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي g' حيث $g'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$ (0.75)

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x+1)$ وهي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	$-\frac{1}{e}-1$	↗ $+\infty$

3 / اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.56;0.57[$. (0.5)

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-1;+\infty[$ فهي مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0.56;0.57[$ و $g(0.56)\simeq-0.02$ و $g(0.57)\simeq0.008$ إذن $g(0.56)\times g(0.57)<0$ ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.56;0.57[$

4 / استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(0.25)

5 / رسم (C_g) .

6 / مناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-xe^x+1=e^m$ في $\mathbb{R}$

$-xe^x+1=e^m$ تكافئ $g(x)=-e^m$ ومنه حلول المعادلة $-xe^x+1=e^m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_g) مع المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=-e^m$ ومنه نميز عدة حالات :

① إذا كان $-e^m<-e^{-1}-1$ أي أن $m>\ln(e^{-1}+1)$ فإن المعادلة $-xe^x+1=e^m$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

② إذا كان $-e^m=-e^{-1}-1$ أي أن $m=\ln(e^{-1}+1)$ فإن المعادلة $-xe^x+1=e^m$ تقبل حلا مضاعفا

③ إذا كان $-e^{-1}-1<-e^m<-1$ أي أن $0<m<\ln(e^{-1}+1)$ فإن المعادلة $-xe^x+1=e^m$ تقبل حلين متمايزين . (0.5)

④ إذا كان $-e^m\geq-1$ أي أن $m\leq0$ فإن المعادلة $-xe^x+1=e^m$ تقبل حلا وحيدا .

II) $G(x)=(ax+b)e^x-x$.

1 / تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$. (0.5)

$G'(x)=ae^x+e^x(ax+b)-1=(ax+a+b)e^x-1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $G'(x)=g(x)$ معناه $a=1$ و $b=-1$

إذن $G(x)=(x-1)e^x-x$

2 / استنتاج اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$.

الدالة G متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ (0.25)

3 / تبيين أن منحنى الدالة G يقبل نقطة انعطاف :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $G''(x)=g'(x)$ و منه الدالة G' تنعدم عند -1 مغيرة إشارتها ومنه النقطة $\Omega\left(-1;\frac{-2}{e}+1\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى الممثل للدالة G (0.25)

III) 1 / اثبات أن $MN=e^x-\ln x$.

لدينا $M(x;e^x)$ و $N(x;\ln x)$ ومنه (0.25)

$MN=\sqrt{(x-x)^2-(e^x-\ln x)^2}=e^x-\ln x$

2 / نضع من أجل كل عدد x من $]0;+\infty[$: $f(x)=MN$.

أ * دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي f'

حيث $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$ (1)

ومنه إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$ هي إشارة $g(x)$ وهي :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^x - \ln x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^x\left(1-\frac{\ln x}{e^x}\right) = +\infty$$

جدول التغيرات

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب *استنتاج أن المسافة MN تكون أقصر ما يمكن لما $x=\alpha$

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $x=\alpha$ هي $f(\alpha)$ ومنه المسافة MN تكون أقصر ما يمكن لما $x=\alpha$. 0.25

تعيين حصر للمسافة MN

لدينا $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $e^{0.56}<e^{\alpha}<e^{0.57}$ .....(I)

و $\ln 0.56<\ln\alpha<\ln 0.57$ أي أن

$-\ln 0.57<-\ln\alpha<-\ln 0.56$ .....(II)

بجمع (I) و (II) نحصل على

$e^{0.56}-\ln 0.57<e^{\alpha}-\ln\alpha<e^{0.57}-\ln 0.56$ أي أن

$2.31<f(\alpha)<2.35$

3 / إثبات أن $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$. 0.25

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha e^{\alpha}-1=0$ إذن $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

4 / استنتاج أن المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α و المماس لـ (P) عند النقطة ذات نفس الفاصلة متوازيان .

معامل توجيه المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α هو e^{α} و معامل توجيه المماس لـ (P) عند النقطة ذات الفاصلة α هو $\frac{1}{\alpha}$ وبما أن $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ فإنهما متوازيان . 0.25