مديرية التربية لولاية تلمسان
ثانويـة أبو تاشفين

اختبار الفصل الثالث
في مادّة الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية

ماي 2015
المدّة : 3 ساعات و نصف

على المترشح اختيار موضوعا واحدا وواحدا فقط ويجب ذكره في الصفحة الأولى.

الموضوع الاختياري الأوّل

التمرين الأول: (5نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر الأعداد المركبة التالية :

$$z_1 = \frac{10+4i}{3+7i} \quad ، \quad z_2 = (1+i)(1-i) \quad ، \quad z_3 = \frac{7+3i}{5-2i} \ .$$

1. أ) اكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3 .
   ب) اكتب على الشكل المثلثي كل من z_1 ، z_2 ، z_3 و كذا الشكل الآسي .
2. أ) مثل النقط A ، B ، C ذات اللواحق $z_A = 1-i$ ، $z_B = 2$ ، $z_C = 1+i$ ثم اثبت أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين . حدد طبيعة الرباعي OABC .
   ب) حدد ثم مثل (Δ) مجموعة النقط M(z) من المستوي بحيث يكون : $\left|\frac{z}{z-2}\right| = 1$.
3. نرفق بكل نقطة M(z) من المستوي ذات اللاحقة z حيث $(z \neq 2)$ ، M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{-2}{z-2}$.
   أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z' = z$.
   ب) اثبت أن لكل عدد مركب z حيث $(z \neq 2)$ فان : $|z'-1| = \frac{|z|}{|z-2|}$ ثم استنتج علاقة بين المسافات OM ، BM ، IM' حيث I نتصف القطعة [OB] .
   ج) استنتج انه عندما تتحرك النقطة M على (Δ) فان M' تتحرك على دائرة (Γ) يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها .

التمرين الثاني :(4ن)

ليكن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال]1 ، 0[.

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$$

1. أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n \geq 1$.
   ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة .
   ج) استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب نهايتها.
2. لتكن (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$.
   أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α .
   ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n و α ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n و α .
   ج) تحقق من نتيجة السؤال 1. ج) وذلك بحساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$. نرمز بـ S لمجموعة النقط M(x , y , z) حيث :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$

1) بين أن S هو سطح كرة مركزها $\Omega\,(0\,,\,2\,,\,0)$ و نصف قطرها 3 .

2) ليكن P المستوي ذو المعادلة الديكارتية $2x - 2y + z - 2 = 0$.

أدرس الوضعية النسبية لـ S و P . عين $S \cap P$.

3) ليكن P_m المستوي ذو المعادلة الديكارتية $2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$.

أ) ليكن Δ المستقيم ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ تحقق أن Δ محتوى في P

ب) أحسب المسافة $d(\Omega\,,\,P_m)$ للنقطة Ω إلى المستوي P_m

جـ) عين m حتى يكون P_m مماس لسطح الكرة S .

التمرين الرابع : (07 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1 . بين أنه توجد خمسة أعداد حقيقية a ، b ، α ، β ، γ بحيث يكون :

من أجل كل x من D_f : $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{e^x - 1}$ و $f(x) = 2x + a + \dfrac{be^x}{e^x - 1}$

2 . نضع : $h(x) = 2(e^x - 2)(e^x - \frac{1}{2})$.

. أدرس إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

. بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - 1)^2}$.

3 . أدرس تغيرات الدالة f.

4 . أثبت أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما .

5 . بين أنه من أجل كل x من D_f : $f(-x) + f(x) = -3$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

6 . أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$.

7 . أرسم المنحني (C) . (الوحدة 2 سم) .

8 . ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة ذات المجهول x التالية :

$(2x - 2 - m)e^x - 2x + m + 3 = 0$

9 .أ . أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

. ب . λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geqslant 2$. أحسب المساحة $s(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وَ المستقيمات التي المعادلات : $y = 2x - 1$ ، $x = \ln 2$ ، $x = \ln \lambda$.

بالتوفيق والسداد

	إنتهى	ص 4/2

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4ن)

الجزء الأول:

نعتبر نقطتين A و D من الفضاء ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AD]$.

1. برهن انه من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

2. بين أن مجموعة النقط M من الفضاء المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$ هي سطح كرة (S) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

الجزء الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ولنعتبر النقط $A(3,0,0)$ و $B(0,6,0)$، $C(0,0,4)$، $D(-5,0,1)$.

1. تحقق أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3. أكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و المارمن النقطة D .

4. عين احداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

5. أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC). ثم برهن أن النقطة H تنتمي لسطح الكرة (S).

التمرين الثاني: (5ن)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة 2 cm) . A وB نقطتان لاحقتاهما i ;2 على الترتيب.

1- ا) عين لاحقة النقطة B_1 صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.

ب) عين لاحقة النقطة B' صورة B_1 بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ثم علم النقط B';B;A.

2- ليكن T التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث: $z'=(1+i)z+1$.

ا) اثبت أن صورة B هي B' وفق التحويل T.

ب) اثبت أن A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T .

ج) برهن انه من اجل كل عدد مركب z يختلف عن i ; $\frac{z'-z}{i-z} = -i$ فسر هده النتيجة باستعمال المسافات والزوايا .

استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M مع M تختلف عن A.

3- ا) ماهي الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E_1) من النقط M صور z حيث : $|z-2| = \sqrt{2}$.

ب) اثبت أن $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$.

ج) استنتج انه إذا كانت M تنتمي إلى (E_1) فان صورتها M' بالتحويل T تنتمي إلى دائرة (E_2) يطلب إعطاء مركزها ونصف قطرها .

التمرين الثالث: (5ن)

1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعبارة: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة على المحورين 3cm).

أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أنشئ المنحنى البياني (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم.

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0 = 5$ و بالعبارة: $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{5}{U_n}\right)$.

استعمل المنحنى (C) و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود U_2, U_1, U_0 على محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n \geq \sqrt{5}$.

ب- بين أن المتتالية (U_n) متناقصة ا. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n)؟

4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فان: $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right) \leq \frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$.

ب- استنتج أن $(U_n-\sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0-\sqrt{5})$. ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ؟

التمرين الرابع: (6ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -3x^2 + 2x^2 \ln x & ;x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نسمي (C_f) المنحنى البياني لهذه الدالة في المعلم السابق.

الجزء الأول:

1- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

2- لتكن A نقطة من المستوي فاصلتها غير معدومة. إذا علمت أن A هي نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل, عين إحداثيات A.

3- أدرس تغيرات الدالة f.

4- أ) بين أن $f''(x) = 4\ln x$ (حيث: f'' هي المشتقة الثانية للدالة f).

ب) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثياها.

ج) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند ω.

5- أرسم (Δ) و (C_f).

الجزء الثاني:

1- α عدد حقيقي موجب تماما ، باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب: $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{e} x^2 \ln x \, dx$. (حيث: $\alpha < e$)

2- ليكن D الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=\alpha$; $x=e$.

أ- أحسب مساحة الحيز D، ولتكن $S(\alpha)$.

ب- استنتج: $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} S(\alpha)$.