مديرية التربية لولاية المدية — ثانوية الشهيد بلعالم محمد (بني سليمان)

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي — دورة مـاي 2015

الشعبة: علوم تجريبية — المدة: 03 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05.5 نقاط).

ليكن z عدد مركب و $p(z)$ العبارة المعرفة بـ : $p(z)=z^3-(2\cos\alpha+1)z^2+(2\cos\alpha+1)z-1$ حيث α عدد حقيقي.

1. أحسب $p(1)$ ثم استنتج بدلالة α مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$.
2. ليكن z_1, z_2 الحلين غير الحقيقين للمعادلة $p(z)=0$ مع $z_2-z_1=2i\sin\alpha$.

   أكتب z_1 على الشكل المثلثي و $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي
3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن النقطة N التي لاحقتها z_α حيث $z_\alpha=2\dfrac{z_1}{z_2}$.

   أ. أوجد مجموعة النقط N من المستوي عندما يمسح العدد α المجال $]0;\pi[$.

   ب. نضع $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$. أكتب z_α على الشكل المثلثي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_\alpha{}^n$ حيقيقي.
4. لتكن النقط I ، A و B صورا لأعداد $z_1=1$ و $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.

   أ. أنشئ على الدائرة المثلثية النقط I ، A و B ثم استنتج العدد $\arg\left(\dfrac{z_B-z_I}{z_A-z_I}\right)$

   ب. حدد طبيعة الرباعي $OAIB$.

   ج. ماذا تمثل النقطة M ذات اللاحقة z بحيث: $(z-z_A)+(z-z_B)+(z-z_I)=0$.

التمرين الثاني :(04 نقاط).

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان

بتمثيليها الوسيطين التاليين : $(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\end{cases}$ و $(\Delta_2):\begin{cases}x=1\\y=-1-k\\z=4+2k\end{cases}$ حيث $t,k\in IR$.

1. عين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).
2. أ. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

   ب. أثبت أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (P).
3. أ. بين أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

4. عين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

5. عين طبيعة المثلث BCD ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثالث: (03.5 نقاط)

I. المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أنشئ (D) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x+2$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

2. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على IN بـ: $u_0=12$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. (دون حسابها) موضحا خطوط الرسم.

ب. ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ؟

3. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$.

ب. بين أن (u_n) متناقصة ، هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

II. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1. عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3. أُحسب بدلالة n المجموع S_n و T_n. حيث: $S_n=v_0+\dots+v_n$ و $T_n=u_0+\dots+u_n$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. نعتبر المعادلتين التفاضليتين: $(E_1): y'=3y$ و $(E_2): y'-y=0$.

1. عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث: $f_1'(0)=3$.

2. عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث: $f_2'(0)=1$.

II. لتكن الدالة g المعرفة على IR بـ: $g(x)=2e^{3x}-e^{x}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم استنتج وجود مستقيم مقارب يطلب كتابة معادلة له.

2. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ. بيّن أن المستقيم $(D): y=5x+1$ مماس لـ (C_g) عند نقطة يطلب تعيينها.

ب. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_g) مع محوري الإحداثيات.

جـ. أُرسم المماس (D) والمنحنى (C_g).

د. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x)=5x+m$

هـ. أُحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات $y=0$ ، $x=-2$ و $x=0$.

III. لتكن الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x)=2e^{-3|x|}-e^{-|x|}$.

1. بيّن أن الدالة f زوجية.

2. أ. استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

ب. أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتائج ثم اكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها 0.

3. أُرسم المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المعلم السابق.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (06 نقاط)

ليكن z_1 و z_2 عددن مركبين بحيث: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

1. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي ثم احسب قيمة العدد S بحيث: $S = \left(\frac{z_1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{2015}$.
2. نعتبر في مستوى مركب النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب z_1، z_1^2، z_1^3 و z_1^4 على الترتيب.

أ. أوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة $O(0;0)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;1),(D;1)\}$.

ب. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 4$.

3. لتكن النقطتين E و F من المستوي لاحقتيهما على الترتيب $z_E = 2 + 2i$ و $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

ولتكن E' و F' صورتا E و F على الترتيب بالدوران r مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

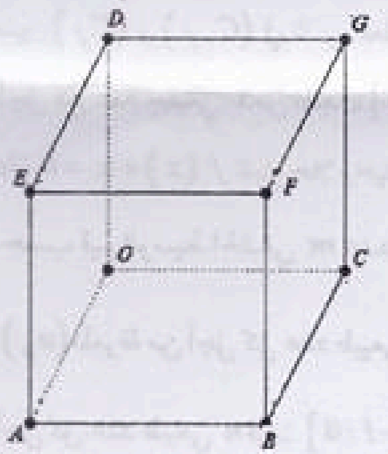
أ. أحسب كل من $z_{E'}$ و $z_{F'}$ لاحقتا النقطتين E' و F' على الترتيب.

ب. تحقق أن: $(z_F - z_E) = (2 + \sqrt{3})(z_{F'} - z_E)$.

ثم استنتج أنّ F صورة F' بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة .

4. استنتج أن النقط F ، F' و E في استقامية .

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)



نعتبر في الفضاء مكعبا $OABCDEFG$ طول حرفه 1 .(الشكل المقابل)

نختار المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}\,,\overrightarrow{OD}\right)$.

1. بين أن المعادلة $x + y + z - 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (ACD) .
2. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل O وعمودي على المستوي (ACD) .

أ. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب. جد إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ACD).

3. من أجل كل عدد حقيقي m نرمز بـ : S_m لمجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0.$$

أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي m، S_m سطح كرة يطلب تعين مركزها I_m ونصف قطرها r.

ب. عيّن قيم m التي من أجلها S_m تشمل النقطة A .

4. أ. تحقق أن مركزي S_0 و $S_{\frac{2}{3}}$ هما نقطتان من المستقيم (Δ).

ب. بين أن المستوي (ACD) يقطع S_0 و $S_{\frac{2}{3}}$ وفق نفس الدائرة (C).

التمرين الثالث: (03.5 نقاط)

n عدد طبيعي، نضع $u_n = \int_n^{n+1} 2^x dx$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{2^n}{ln 2}$.
2. بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.
3. نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $T_n = u_0{}^2 + u_1{}^2 + ... + u_n{}^2$.

أ. أحسب S_n و T_n بدلالة n.

ب. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{31}{ln 2}$.

التمرين الرابع (06.5 نقاط)

I. g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

- أُدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارتها.

II. f الدالة المعرفة على IR بـ: $f(x) = e^x ln(1+e^{-x})$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أُحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أرسم المنحنيين (C_f) و (C_{-f}) في نفس المعلم السابق.(نقبل أن $-0,7$ هي فاصلة نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C_f)).
5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;0]$ لدينا: $0 \le f'(x) \le g(e)$.
6. بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1;0[$.
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $ln(e^x+1) - me^{-x} - x = 0$.

III. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -f(u_n) \end{cases}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \in [-1;0]$.
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $|u_{n+1} - \alpha| \le g(e)|u_n - \alpha|$.
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $|u_n - \alpha| \le [g(e)]^n$.
4. علما أن: $g(e) \le 0,6$، أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.