الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مدرية التربية لولاية الاغواط | **ثـــانـويات ولاية الأغواط**
امتحان بكالوريا تجريبي | **دورة مـــــــاي 2016**
الشعبة : علوم تجريبية | **يوم :09 مـــــاي 2016**

اختبار في مادة الرياضيات | **المدة : 03 سا و نصف**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليّين

الموضوع الأول

التمرين الأول(05 ن):

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.نعتبر النقط A ، B ، C و Dذات اللاحقات $Z_A=\sqrt{3}-i$ ؛ $Z_B=\sqrt{3}+i$ ؛ $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ –علم النقط A ، B ، C و D .

ب–اكتب العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ – تحقق أن النقط A ، B ، Cو Dتنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3)لنعتبر التحويل النقطي Sالذي يحول Oإلى Aويحول Cإلى D .

أ – اثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .

ب –تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C.

4) لتكن النقطة Gمرجح النقط A ، B ، Cالمرفقة بالمعاملات 1، 1–، 2على الترتيب.

أ– عين احداثيي النقطة G .

ب –بين ان (Γ) مجموعة النقطM من المستوي التي تحقق: $MA^2-MB^2+2MC^2=8$

هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها1 .

التمرين الثاني(05 ن):

نعتبر في الفضاء النقط $A\,(1,0,2)$; $B\left(\frac{1}{3},\frac{-8}{3},\frac{2}{3}\right)$; $C\,(-3,-1,-1)$; $D\,(1,-1,4)$

و المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1+3\alpha \\ z=2-3\beta \end{cases}$ حيث αو βوسيطان حقيقيان

1) أ– بين أن النقط A,B,Cتعين مستويا

ب– تحقق ان الشعاع $\vec{n}(2,1,-3)$ ناظمي للمستوي (ABC)،ثم اكتب معادلة ديكارتية له

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثم بين ان (ABC)و (P) متعامدان

3) نعتبر المستقيم (Δ)المعرف بالجملة : $\begin{cases} 2x+y-3z+4=0 \\ 3x-3y+z-2=0 \end{cases}$

أ– تحقق ان $E(-2,-3,-1)$ نقطة من (Δ)

ب- بين ان $\vec{u}(8,11,9)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ثم اكتب تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

4) أ- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

ب- بين ان المثلث ABC قائم ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرينالثالث: (03 نقاط)

يحتوي كيس على 3كريات بيضاء و4 كريات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس

1-ماهو عدد الحالات الممكنة للسحب

2-ما هو احتمال الحصول على كرتين بالضبط لونهما ابيض

3- ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون

4- ما هو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الاقل

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R-\{1\}$ كمايلي: $f(X)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o},\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim_{x\to1^+}f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا

ب/ بين أنه بوضع $t=\frac{2}{x-1}$ فإن f تكتب على الشكل: $f(t)=\frac{e}{2}t^2e^t$ ثم استنتج $\lim_{x\to1^-}f(x)=0$

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $R-\{1\}$ فإن : $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلان أحدهما 1- والآخر $\propto$ على المجال $]0;1[$

5) أنشئ المنحنى (c_f)

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=m$

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $R-\{1\}$ كمايلي: $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$

أ/ أحسب $g'(x)$

ب/ أكتب $f(x)$ بدلالة $g'(x)$ و $g(x)$

ج/ استنتج دالة أصلية للدالة f

8) β عدد حقيقي حيث $\beta\epsilon]-\infty;1[$

أ/ أحسب بدلالة β المساحة $A(\beta)$ المحددة بالمنحنى (c_f) والمستقيمين $x=-\beta$ و $x=\beta$

ب/ أحسب النهاية $\lim_{\beta\to1}A(\beta)$

الموضــوع الثاني

التمرين الأول :(4.5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$.

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $u_n > \frac{4}{3}n$ و استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2n + 1$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$.

جـ) احسب بدلالة n. المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثاني : (4.5 نقط)

في الفضاء المزود بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتعامد والمتجانس نعتبر النقط $A(1;0;-2)$، $B(3;0;1)$، $C(1;0;1)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A و تشمل النقطة B

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

- بين أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة B

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (Δ) .

4. أ- عين احداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب- أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ثم استنتج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين .

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(C;1),(B;e^t)\}$. أ) بين أن : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

جـ) استنتج ان مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$.

التمرين الثالث:(4نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة

$z_A = -2i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = \sqrt{3} + i$

1. أ) اكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي .

ب)استنتج مركز ونصف قطر الدائرة (C) التي تشمل النقط A ، B ، C

جـ) علم النقط A ، B ، C ثم أرسم الدائرة (C)

1.) اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي ،ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) بين أن النقطة O′ ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران r

ب) بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (C) ثم انشئ (C′) صورة الدائرة (C) بالدوران r.

جـ) تحقق أن الدائرتين (C) و (C′) تشتركان في النقطتين A و B

التمرين الرابع :(07 نقط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1,+\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ (حيث $\ln$: اللوغاريتم النيبيري)

(Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

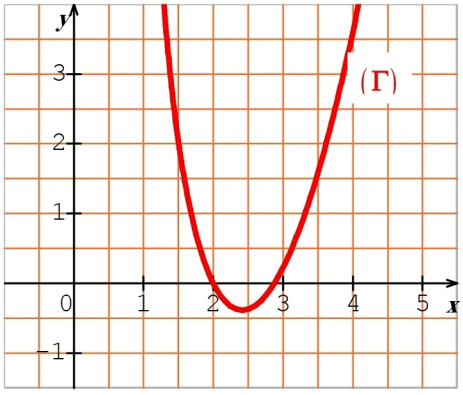
1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) ، عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.

2) أحسب $g(2)$ ، ثم بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث: $2{,}87 < \alpha < 2{,}88$.

3) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1,+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1,+\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \frac{4\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1) أحسب $\lim_{x \to 1} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيًا ، ثم أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) = 3{,}9$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1,+\infty[$ كما يلي: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$.

أ) أحسب $h'(x)$ ، ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

ب) أحسب التكامل $\int_2^5 f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانيًا.

تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2016

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط

ثانويات ولاية الأغواط

التصحيح المفصّل للبكالوريا التجريبي في مادّة الرّياضيات

شعبة : العلوم التجريبية

2016-2015

zeda malek

الموضوع الأوَّل

zeinmalek

التمرين الأوّل:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z:

$$(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0 \Leftrightarrow (Z-2i=0)\vee(Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0).$$

نحل المعادلة: $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0,.....(*)$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2\sqrt{3} \\ c=4 \end{cases} \text{ حيث } \Delta=b^2-4ac$$

و منه : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4(1)(4)=-4$

$Z-2i=0$ يعني أنّ: $Z=2i$

إذن : مجموعة حلول المعادلة $(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$ هي:

$$S=\left\{2i\,;\sqrt{3}-i\,;\sqrt{3}+i\right\}$$

المعادلة $(*)$ تقبل حلين مترافقين

$$z'=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{4}}{2}$$

$$z'=\sqrt{3}-i$$

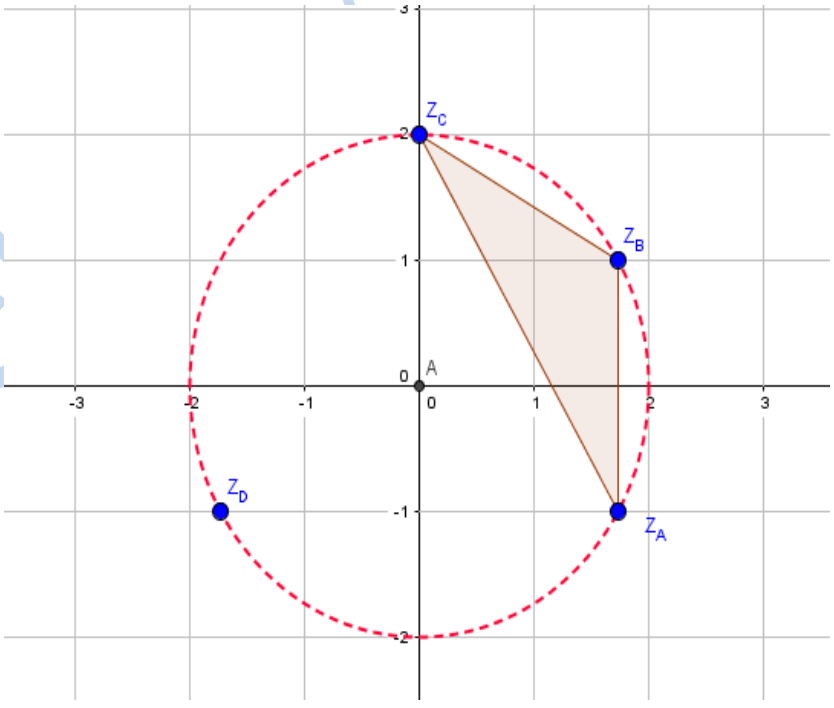
$$z''=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}+i\sqrt{4}}{2}$$

$$z''=\sqrt{3}+i$$

2- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط $A\,;B\,;C$ وَ D لواحقها:

$Z_A=\sqrt{3}-i$ ؛ $Z_B=\sqrt{3}+i$ ؛ $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ- تعليم النقط $A\,;B\,;C$ وَ D:



Abdelmalek ze'

ب- كتابة العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC.

- كتابة العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{(\sqrt{3}-i)-(\sqrt{3}+i)}{(2i)-(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{2i-\sqrt{3}-i}$$

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{-2i}{i-\sqrt{3}}=\frac{(-2i)(-i-\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(-i-\sqrt{3})}$$

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{1+3}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

طويلة العدد: $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$

لدينا: $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه: $\left|\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}\right|=\left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

عمدة العدد: $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$

$\arg\left(\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}\right)=arg\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و منه $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$arg\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ وَ $(k\in\mathbb{Z})$

كتابة العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و ذلك يعني أنَّ A صورة C بالدوران الذي مركزه B (أي : BA=BC) و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

نستنتج من ذلك أنَّ: المثلّث ABC متساوي الساقين .

ج- التحقق أن النقط $A;B;C$ وَ D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O :

النقط $A;B;C$ وَ D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يعني أنَّ: $OA=OB=OC=OD$.

$OA=OB=OC=OD$ يعني أنَّ: $|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=|Z_D|$

لدينا:

$Z_A=\sqrt{3}-i$ و منه: $|Z_A|=|\sqrt{3}-i|=2$

$Z_B=\sqrt{3}+i$ و منه: $|Z_B|=|\sqrt{3}+i|=2$

$Z_C=2i$ و منه: $|Z_C|=|2i|=2$

$Z_D=-\sqrt{3}-i$ و منه: $|Z_D|=|-\sqrt{3}-i|=2$

و منه : $OA=OB=OC=OD$

أي:

النقط $A;B;C$ وَ D

تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2

3) S تحويل نقطي يحول O إلى A وَ يحول C إلى D:

$S(O)=A$ يعني : $Z_A=aZ_O+b,.....(1)$ وَ $S(C)=D$ يعني : $Z_D=aZ_C+b,...(2)$

نطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $Z_D-Z_A=a(Z_C-Z_O)$

Abdelmalek Abdelmalek

و منه: $a=\dfrac{Z_D-Z_A}{Z_C-Z_O}$

ت-ع: $a=\dfrac{-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i}{2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2i}$

بالضرب في المرافق: $a=\dfrac{\left(-2\sqrt{3}\right)\left(-2i\right)}{\left(2i\right)\left(-2i\right)}=\dfrac{4i\sqrt{3}}{4}$ بالتبسيط نجد: $a=i\sqrt{3}$

و منه : S تشابه مباشر : نسبته $|a|=\sqrt{3}$ و زاويته $arg\left(a\right)=\dfrac{\pi}{2}$. $a=i\sqrt{3}$

و مركزه:w ذات اللّاحقة $Z_w=\dfrac{b}{1-a}$

لإيجاد b نبحث عن العبارة المركبة لـ : S

من العبارة (1) لدينا: $Z_A=aZ_O+b$ و منه : $\sqrt{3}-i=i\sqrt{3}\left(0\right)+b$ و منه : $b=\sqrt{3}-i$

$Z_w=\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}$ بالضرب في المرافق نجد: $Z_w=\dfrac{b}{1-a}\Leftrightarrow Z_w=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$

$Z_w=\dfrac{\sqrt{3}+3i-i+\sqrt{3}}{1+3}$

$Z_w=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4}$ بالتبسيط نجد: $Z_w=\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}$

$Z_w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

ب-تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C:

صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C يعني أنَّ: $\left(Z_C-Z_w\right)=i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)$

و منه: $Z_C=i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w$

zebda Abdelmalek

لدينا:

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=i\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{2i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=2i$$

$$i\sqrt{3}\left(Z_B-Z_w\right)+Z_w=Z_C$$

و منه :صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C

4- لتكن النقطة Gمرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات $1;-1;2$على الترتيب.

أ– تعين احداثي النقطة G:

$$Z_G=\frac{Z_A-Z_B+2Z_C}{1-1+2}\quad,\quad Z_G=\frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i+2\times 2i}{2}=i$$ ت ع:

و منه إحداثيات النقطة G هي: $G(0,1)$

ب-إثبات أنَّ (Γ) دائرة مركزها G و نصف قطرها 1.

لدينا: $(\Gamma):MA^2-MB^2+2MC^2=8;.....(*)$

$$(*)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=8$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+2\times\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GB}^2-2\times\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{GC}^2+2\times 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}=8$$

$$\Leftrightarrow MG^2+GA^2+2\times\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}-MG^2-GB^2-2\times\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2MG^2+2GC^2+2\times 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}=8$$

$$\Leftrightarrow 2MG^2+GA^2-GB^2+2GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}\right)=8$$

حساب GA , GB وَ GC .

لدينا: $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix};\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

و منه: $GA=\sqrt{7};GB=\sqrt{3};GC=1$

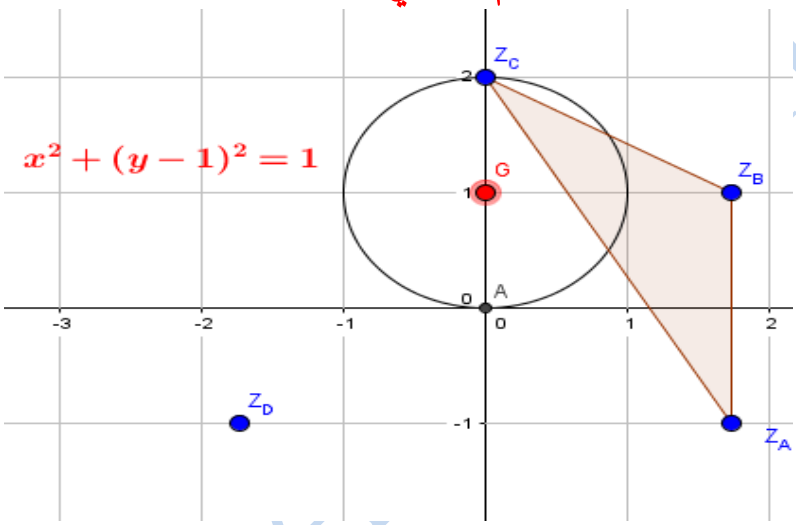
zeda Abdelmalek

إذن:

$$2MG^2+GA^2-GB^2+2GC^2=8 \Leftrightarrow 2MG^2+7-3+2(1)=8$$
$$\Leftrightarrow 2MG^2+6=8$$
$$\Leftrightarrow 2MG^2=2$$
$$\Leftrightarrow MG^2=1$$
$$\Leftrightarrow MG=1$$

و منه: (Γ) هي:
دائرة مركزها G نصف قطرها 1

رسم توضيحي – فقط –



طريقة ثانية:

$$(\Gamma): MA^2-MB^2+2MC^2=8;.....(*)$$
$$(*) \Leftrightarrow |Z-Z_A|^2-|Z-Z_B|^2+2|Z-Z_C|^2=8$$

نضع: $Z=x+iy$

$$|x+iy-(\sqrt{3}-i)|^2-|x+iy-(\sqrt{3}+i)|^2+2|x+iy-(2i)|^2=8$$

و منه: $|(x-\sqrt{3})+i(y+1)|^2-|(x-\sqrt{3})+i(y-1)|^2+2|(x)+i(y-2)|^2=8,....(\delta)$

نعلم أنّ:

إذا كان: $Z=x+iy,.....(x,y)\in\mathbb{R}^2$ فإنّ: $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و منه: $|Z|^2=\sqrt{x^2+y^2}^2$

zebda

إذن:

$$(\delta) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y+1)^2}^2 - \sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2}^2 + 2\sqrt{(x)^2+(y-2)^2}^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y+1)^2-\left(x-\sqrt{3}\right)^2-(y-1)^2+2(x)^2+2(y-2)^2=8$$

$$\Leftrightarrow y^2+1+2y-y^2-1+2y+2x^2+2y^2+8-8y=8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+6-4y=8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=1$$

إذن: المجموعة المطلوبة هي الدائرة ذات المركز $G(0,1)$ و نصف قطرها 1.

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

لدينا: $D(1,-1,4); C(-3,-1,-1); B\left(\frac{1}{3},\frac{-8}{3},\frac{2}{3}\right); A(1,0,2)$

(1

أ- إثبات أن النقط C,B,A تعين مستويا

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AC}(-4;-1;-3)$ نلاحظ أنَّ: $\frac{-2}{-4}=\frac{3}{3}\neq\frac{-8}{-1}=\frac{3}{3}\neq\frac{-4}{-1}=\frac{3}{3}$

و منه: $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيّا .

أي: النقط C,B,A تعين مستويا

(1

أ- التحقق أنَّ $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) يكافئ أنَّ: $(\vec{n}\perp\overrightarrow{AC})\wedge(\vec{n}\perp\overrightarrow{AC})$

$(\vec{n}\perp\overrightarrow{AB})\wedge(\vec{n}\perp\overrightarrow{AC})$ تكافئ أنَّ $(\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0)\wedge(\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0)$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\left(-\frac{2}{3}\right)+1\times\left(-\frac{8}{3}\right)-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(-4)+1\times(-1)-3\times(-3)=0\end{cases}$$

و منه: $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

zeda Abdelmalek

- تعيين معادلة للمستوي (ABC).

معادلة (ABC) من الشكل $2x+y-3z+d=0$

و لإيجاد d نعوض إحداثيات A أو B أو C في معادلة (ABC)

نعوض A مثلا: $2(1)+y(2)-3(2)+d=0$ بعد التبسيط نجد: $d=4$

إذن: $(ABC): 2x+y-3z+4=0$

2) المعادلة الديكارتية للمستوي (P)

التمثيل الوسيطي للمستوي (P) هو: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1+3\alpha \\ z=2-3\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1+3\alpha \\ z=2-3\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

من العادلة (1) لدينا: $\beta=x-1-3\alpha$

$\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta.....(1) \\ y=1+3\alpha.....(2) \\ z=2-3\beta.....(3) \end{cases}$

من (1) لدينا: $\beta=x-1-3\alpha$

من (2) لدينا: $\alpha=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

نعوض β و α في (3) نجد: $z=2-3\left(x-1-3\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}\right)\right)$

$z=2-3(x-1-y+1)$

ومنه: $z=2-3x+3y$

$3x-3y+z-2=0$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي: $(P): 3x-3y+z-2=0$

- إثبات أنّ (ABC) وَ (P) متعامدان:

$(ABC)\perp(P)\Leftrightarrow \vec{n_p}\perp\vec{n}_{(ABC)}$

$\vec{n_p}\perp\vec{n}_{(ABC)}\Leftrightarrow \vec{n_p}.\vec{n}_{(ABC)}=0$

$\vec{n_p}.\vec{n}_{(ABC)}=(2\times3)+(1\times(-3))+(1\times(-3))$

$\vec{n_p}.\vec{n}_{(ABC)}=0$

3)

أ- التحقق أنّ $E(-2;-3;-1)$ نقطة من (Δ):

$E\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x_E+y_E-3z_E+4=0 \\ 3x_E-3y_E+z_E-2=0 \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} 2(-2)+(-3)-3(-1)+4=0 \\ 3(-2)-3(-3)-1-2=0 \end{cases}$

نستنتج أنّ: $E(-2;-3;-1)$ نقطة من (Δ).

zebda Abdelmalek

ب- إثبات أنَّ $\vec{u}(8;11:9)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ثم اكتب تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

$\vec{u}(8;11;9)$ يعني: $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}_{(ABC)}=0\\ \vec{u}.\vec{n}_{(p)}=0\end{cases}$

$\vec{u}.\vec{n}_{(ABC)}=\begin{pmatrix}8\\11\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=16+11-27$ و منه: $\vec{u}.\vec{n}_{(ABC)}=0$

$\vec{u}.\vec{n}_{(ABC)}=\begin{pmatrix}8\\11\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}=24-33+9$ و منه: $\vec{u}.\vec{n}_{(P)}=0$

و منه:

$\vec{u}(8;11:9)$ شعاع توجيه لـ (Δ)

- التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

لدينا:

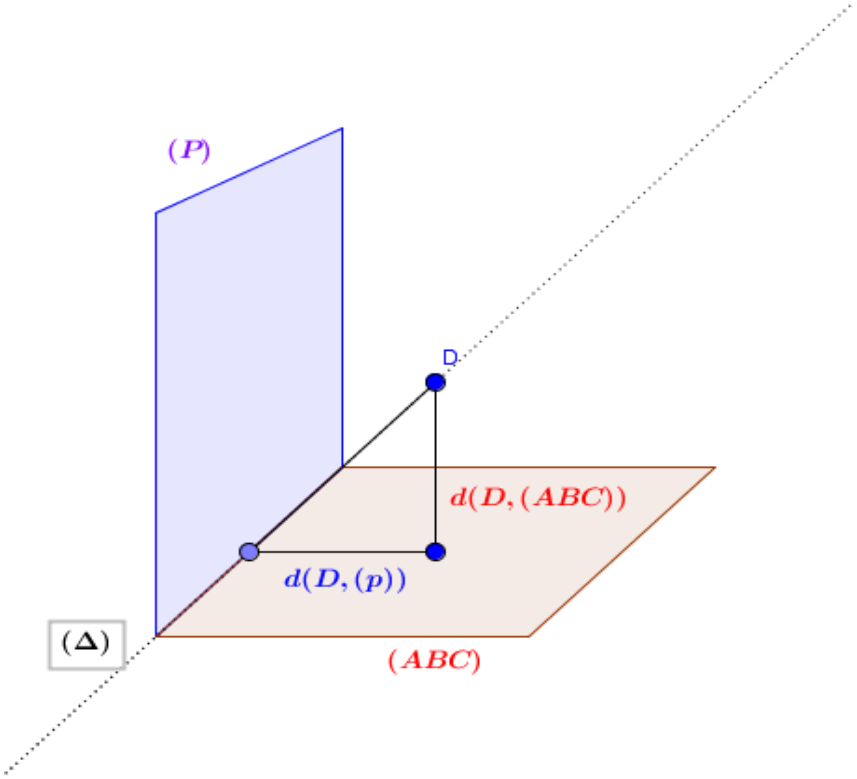
- $\vec{u}(8;11:9)$ شعاع توجيه لـ (Δ)
- $E(-2;-3;-1)$ نقطة من (Δ)

و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم : $(\Delta):\begin{cases}x=8t-2\\y=11t-3\\z=9t-1\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

4)

أ- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) :

zeda Abdelmalek



$$d\left(D,(P)\right)=\frac{\left|3x_D-3y_D+z_D-2\right|}{\sqrt{(3)^2+(-3)^2+(1)^2}}$$

$$d\left(D,(P)\right)=\frac{\left|3(1)-3(-1)+(4)-2\right|}{\sqrt{(3)^2+(-3)^2+(1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{19}}$$

$$d\left(D,(ABC)\right)=\frac{\left|2x_D+y_D-3z_D+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}$$

$$d\left(D,(ABC)\right)=\frac{\left|2(1)+(-1)-3(4)+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\left(d\left(D,(\Delta)\right)\right)^2=\left(d\left(D,(ABC)\right)\right)^2+\left(d\left(D,(P)\right)\right)^2$$

$$\left(d\left(D,(\Delta)\right)\right)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{19}}\right)^2$$

$$d\left(D,(\Delta)\right)=\sqrt{\frac{1827}{266}}$$

ب - إثبات أنّ المثلث ABC قائم:

لدينا :

$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$ ومنه : $AB=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{28}{3}}$

$\overrightarrow{AC}(-4;-1;-3)$ و منه: $AC=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{26}$

zebda Abder ek

$$CB=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{3}}$$ ومنه : $$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+3\\-\frac{8}{3}+1\\\frac{2}{3}+1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{-5}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix};$$

نلاحظ أنَّ:

$$AB^2+CB^2=\frac{28}{3}+\frac{50}{3}=26$$
$$AB^2+CB^2=AC^2$$

و منه : حسب نظرية فيثاغورث نستنتج أنَّ المثلث ABC قائم في B

- حجم رباعي الوجوه ABCD :

$$V_{ABCD}=\frac{S_{ABC}\times d(D,(ABC))}{3}$$

- حساب مساحة المثلث ABC: $$S_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}$$

$$S_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{\frac{28}{3}}\times\sqrt{\frac{50}{3}}}{2}$$
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{\frac{28}{3}}\times\sqrt{\frac{50}{3}}}{2}=\frac{\sqrt{1400}}{6}$$

إذن: $$V_{ABCD}=\frac{\frac{\sqrt{1400}}{6}\times\frac{7}{\sqrt{14}}}{3}=\frac{70}{18}$$
$$V_{ABCD}=\frac{35}{9}(unité\ de\ volume)$$

التمرين الثالث :

1) عدد الحالات الممكنة للسحب :

السحب في آن واحد نستعمل التوفيقة :

عدد الحالات الممكنة: $$card(\Omega)=C_7^3=35$$

2) الحدث A " الحصول على كرتين بالضبط لونهما ابيض "

تقديره: كرتان بيضاوان، وَ كرية سوداء.

$$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_3^2\times C_4^1}{C_7^3}$$

zebda Abdelmalek

$$p(A) = \frac{3\times4}{35} = \frac{12}{35}$$

3) الحدث B " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

تقديره: 3 كرات بيضاء أو 3 كرات سوداء

$$p(B) = \frac{\text{card(B)}}{card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3}$$

$$p(B) = \frac{1+4}{35} = \frac{1}{7}$$

4) الحدث C " احتمال الحصول على كرية بيضاء على الاقل"

نحل هذا السؤال بطريقتين:

الطريقة الأولى:

الحدث C تقديره: الحصول على كرة بيضاء و 2 سوداء، أو 2بيضاء و واحدة سوداء ، أو 3 بيضاء

أي: $p(C) = \frac{\text{card(c)}}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1\times C_4^2 + C_3^2\times C_4^1 + C_3^3\times C_4^0}{C_7^3}$

$$= \frac{(3\times6)+(3\times4)+1}{35} = \frac{31}{35}$$

الطريقة الثانية : نستعمل الحدث العكسي $\overline{C}$

$\overline{C}$ تقديره: عدم الحصول على أية كرية بيضاء أي 3 سوداء

تصبح :

$P(\overline{C}) = \frac{card(\overline{C})}{crad(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_7^3}$ و منه : $P(\overline{C}) = \frac{4}{35}$

$$p(C) = 1 - p(\overline{C})$$

$$= 1 - \frac{4}{35}$$

$$= \frac{31}{35}$$

zeda Abdelmalek

التمرين الرابع :

1) أ/ حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x+1}{x-1}}=e^1 \quad \text{لأنّ:} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{2}{(x-1)^2}=+\infty \quad \lim_{x\xrightarrow{>}1}e^{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty \quad \text{لأنّ} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x+1}{x-1}}=e^1 \quad \text{لأنّ:} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=0$$

التفسير الهندسي:

- ✓ $y=0$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل.
- ✓ $x=1$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

ب/

نضع: $t=\frac{2}{x-1};.....(1)$ و منه: $t^2=\frac{4}{(x-1)^2}$ بتقسيم الطرفين على العدد 2 . نجد: $\frac{t^2}{2}=\frac{2}{(x-1)^2}$

و لدينا أيضاً: $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1};.....(2)$

للتوضيح: $\frac{x+1+1-1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

من (1) و (2) نستنتج أنّ: $\frac{x+1}{x-1}=1+t$

لدينا: $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ بتغير المُتغيّر تُصبح: $f(t)=\frac{t^2}{2}e^{1+t}=\frac{t^2}{2}e^te^1$

إذن: $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)$ $\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{2}e^te^1=0$

2) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $R-\{1\}$ فإن: $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

zeba Abdelmalek

$$f'(x) = \left[\frac{2}{(x-1)^2}\right]' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2}\left[e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]'$$

$$f'(x) = \frac{-4(x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x+4}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{-4}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}}$$

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

اشارة المشتقة $f'(x)$ من اشارة $-4x$ ،

ومنه f متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجالين $[0;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$+\infty$ ‖	↘	0

4) تبيين أنه على المجال $]-\infty;1[$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلان أحدهما 1- والآخر α حيث $\mathbf{0.4 < \alpha < 0.5}$

لدينا $f(-1) = \frac{2}{(-1-1)^2} e^0$ ومنه $f(-1) = \frac{1}{2}$ ..... (محققة)

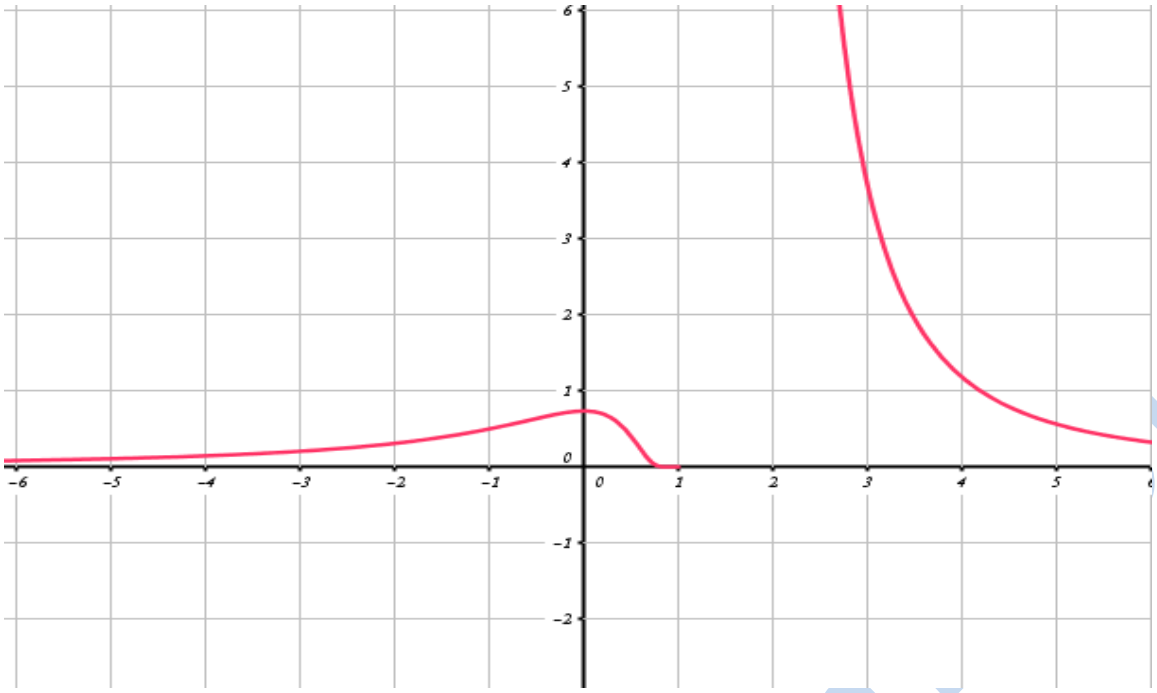
على المجال $[0;1]$ نلاحظ أن الدالة f :

مستمرة ورتيبة (متناقصةتماما) و $f(0.4) < \frac{1}{2} < f(0.5)$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنَّ: المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\mathbf{0.4 < \alpha < 0.5}$

5) انشاء المنحنى

zeda Abdelmalek



6) المناقشة البيانية: حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.

إذا كان: $m \leq 0$ المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان: $0 < m < \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول (حلّان موجبان والآخر سالب).

إذا كان: $m = \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلّان أحدهما موجب والآخر معدوم.

إذا كان: $m > \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حل واحد موجب.

7) أ/ حساب $g'(x)$: $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

ب/ كتابة $f(x)$ بدلالة $g'(x)$ و $g(x)$: $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$f(x) = -g'(x)e^{g(x)}$$

ج/ استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;1[$:

لتكن F أصلية للدالة f ومنه $F(x) = -e^{g(x)}$ أي $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}}$

8) حساب بدلالة β المساحة $A(\beta)$:

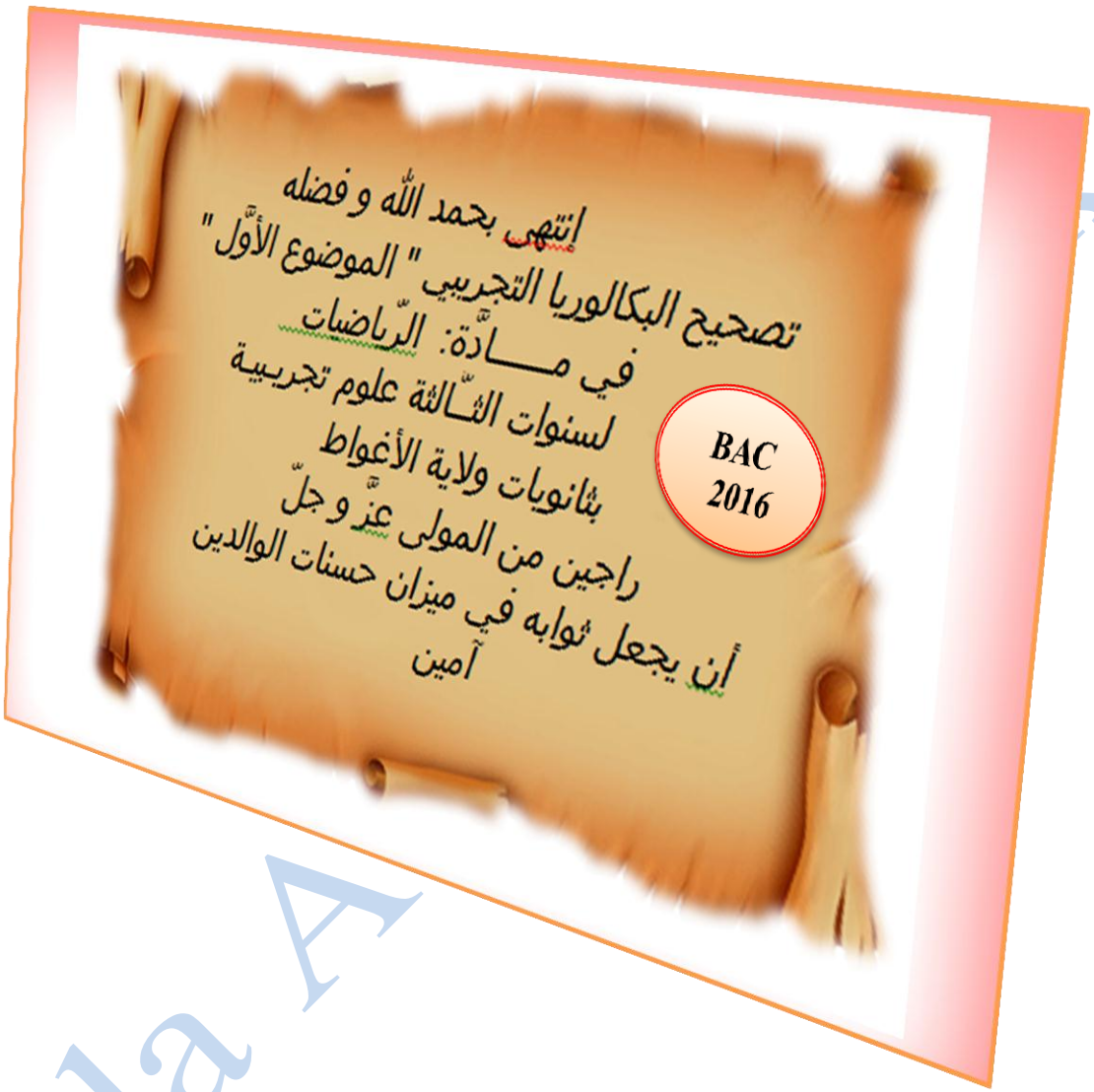
$$A(\beta) = \int_{\beta}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{\beta}^{0}$$

$$= \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}}\right]_{\beta}^{0} = -e^{-1} - \left(-e^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}\right)$$

$$= e^{\frac{\beta+1}{\beta-1}} - e^{-1} \quad (u.a)$$

ب/ حساب النهاية : $\lim\limits_{\beta \to -\infty} A(\beta) = e - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}$

zeda Abdelk


إنتهى بحمد الله و فضله
تصحيح البكالوريا التجريبي " الموضوع الأوّل "
في مـــادّة: الرّياضيات
لسنوات الثّـالثة علوم تجريبية
بثانويات ولاية الأغواط
راجين من المولى عزّ و جلّ
أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين
BAC
2016

zebda A

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط

ثانويات ولاية الأغواط

zebda abdelmalek

zebda abdelmalek

التمرين الأوَّل:

لدينا: $\begin{cases} 3U_{n+1} = U_n + 4n + 4 \\ U_0 = 3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} \\ U_0 = 3 \end{cases}$

1) حساب $U_1; U_2$ وَ U_3 :

$U_1 = U_{0+1} = \frac{1}{3}U_0 + \frac{4}{3}\times 0 + \frac{4}{3}$

$U_1 = \frac{1}{3}(3) + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

$U_2 = U_{1+1} = \frac{1}{3}U_1 + \frac{4}{3}\times(1) + \frac{4}{3}$

$U_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{31}{9}$

$U_3 = U_{2+1} = \frac{1}{3}U_2 + \frac{4}{3}\times(2) + \frac{4}{3}$

$U_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{31}{9}\right) + \frac{4}{3} = \frac{139}{27}$

2)

أ- البرهان بالتراجع أنَّه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$

1- التحقق : من أجل $n = 0$

لدينا : $U_0 = 3 > 0$ إذن الخاصية مُحققة

2- الفرضية : نفرض أنَّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $U_n > 0$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $U_{n+1} > 0$

لدينا حسب الفرضية : $U_n > 0$

بالضرب في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}U_n > 0$

نعلم أنَّ: $\frac{4}{3}n + \frac{4}{3} > 0$

و منه: $\frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} > 0$ أي: $U_{n+1} > 0$

3- نستنتج أنَّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $U_n > 0$

ب-إستنتاج أنَّ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإنَّ: $U_n > \frac{4}{3}$

لدينا: $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} \Rightarrow U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3}$

$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3}$

$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}n$

و منه: $3U_n = 3U_{n-1} + 4n$

zebda abdelmalek

$3U_{n-1}=3U_n-4n;.....(\otimes)$ و منه: $3U_n=3U_{n-1}+4n$

لدينا: $U_n>0$ و منه: $U_{n-1}>0$

$\otimes \Leftrightarrow 3U_n-4n>0$

$\Leftrightarrow U_n>\frac{4}{3}n$

ج- نهاية U_n

لدينا: $U_n>\frac{4}{3}n$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n>\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{3}n$

بما أنَّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{3}n=+\infty$ فإنَّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

2)

نستنتج أنَّ:

بما أنَّ: $U_n>0$ فإنَّ: $U_{n-1}>0$

3) .

من أجل كل $(n\in\mathbb{N})$ لدينا: $V_n=U_n-2n+1$

أ- إثبات أنَّ (V_n) متتالية هندسية :

(V_n) هندسية يعني: $V_{n+1}=V_n.q$ حيث $(q\in\mathbb{R})$ q: يسمى أساسها

لدينا: $V_n=U_n-2n+1$

و منه:

$$\begin{aligned}V_{n+1}&=U_{n+1}-2(n+1)+1\\&=\frac{1}{3}U_n+\frac{4}{3}n+\frac{4}{3}-2n-2+1\\&=\frac{1}{3}U_n+\frac{4}{3}n+\frac{4}{3}-2n-1\\&=\frac{1}{3}U_n+\frac{4}{3}n+\frac{4}{3}-\frac{6}{3}n-\frac{3}{3}\\&=\frac{1}{3}U_n-\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}(U_n-2n+1)\\&=\frac{1}{3}V_n\\&=qV_n\end{aligned}$$

و منه: (V_n) متتالية هندسية أساسها: $q=\frac{1}{3}$

حدها الأوَّل: $V_0=U_0-2(0)+1$

$V_0=3+1=4$

و حدّها العام: $V_n=V_0\times q^n$

ت-ع: $V_n=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

la abdelmalek

ب-إستنتاج أنّ: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

لدينا: $V_n = U_n - 2n + 1$

و منه:

$U_n = V_n + 2n - 1$ و منه: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

ج-حساب بدلالة n المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

$$S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

إستنتاج بدلالة n المجموع T_n:

لدينا: $T_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ وَ مما سبق لدينا: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

$$T_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2(0) - 1 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 2(1) - 1 + \ldots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$$

$$T_n = \underbrace{4\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \ldots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{S_n} + \underbrace{2\left((0) + (1) + \ldots + n\right)}_{=2\left[\frac{(n+1)(0+n)}{2}\right]} - 1(n+1)$$

$$T_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n) - 1(n+1)$$

$$T_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-1)$$

zebda abdelmalek

التمرين الثّاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(1;0;-2), B(3;1;0), C(1;0;1)$

1) معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها A و تشمل B:

معادلة (S) من الشكل: $(S):(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

(S) مركزها A و تشمل B يعني نصف قطرها هو AB أي $R=AB$

✓ حساب AB:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2+(0+2)^2}$$

$$AB=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$$

إذن:

$$(S):(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=3^2$$

$$(S):x^2-2x+1+y^2+z^2+4z+4=9$$

$$(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+5=9$$

$$(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$$

2) (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث:

$$(\Delta):\begin{cases}x+2z-3=0\\y+z-1=0\end{cases}$$

(Δ) هو تقاطع المستويين $(Q_1):x+2z-3=0$ وَ $(Q_2):y+z-1=0$

zebda abdelmalek

$\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه (Δ) و $B \in (\Delta)$ يعني: $\begin{cases} (1): \vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_1)}} \\ (2): \vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_2)}} \\ (3): B \in (Q_1) \\ (4): B \in (Q_2) \end{cases}$

(1)	(2)	(3)	(4)
$\vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_1)}} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_{(Q_1)}} = 0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2-0+2 = 0$ و منه: $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_1)}}$	$\vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_2)}} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_{(Q_2)}} = 0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -0-1+1 = 0$ و منه: $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_{(Q_2)}}$	$B \in (Q_1) \Leftrightarrow x_B + 2z_B - 3 = 0$ $3+2(0)-3=0$ و منه: $B \in (Q_1)$	$B \in (Q_2) \Leftrightarrow y_B + z_B - 1 = 0$ $(1)+(0)-1=0$ ومنه: $B \in (Q_2)$

من الجدول السابق نستنتج أنَّ: $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه (Δ) و $B \in (\Delta)$

طريقة ثانية:

نحل الجملة $\begin{cases} x + 2z - 3 = 0, \ldots..(1) \\ y + z - 1 = 0, \ldots..(2) \end{cases}$

من(1) لدينا: $x = 3 - 2z$

من(2) لدينا: $y = 1 - z$

نضع : $z = t$ حيث: $(t \in \mathbb{R})$

و منه نستنتج أنَّ: $(\Delta): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$;.....(Φ)

من (Φ) نستنتج أنَّ $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه (Δ)

$B \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 - 2t \\ y_B = 1 - t \\ z_B = t \end{cases}$.

نعوض إحداثيات B في التمثيل الوسيطي لـ : (Δ) نجد: $\begin{cases} 3 = 3 - 2t \\ 1 = 1 - t \\ 0 = t \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

إذن: $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه (Δ) و $B \in (\Delta)$

zebda a'elmalek

تمرين من بكالوريا

سؤال إضافي: برهن أنَّ (Δ) هو مستقيم تقاطع المستويين (Q_1) وَ (Q_2).

حيث: $(\Delta): \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$ و لدينا: $\begin{cases} x+2z-3=0; \ldots (Q_1) \\ y+z-1=0; \ldots (Q_2) \end{cases}$

(Δ) هو تقاطع المستويين $(Q_1): x+2z-3=0$ وَ $(Q_2): y+z-1=0$

(Q_1)وَ (Q_2) غير متوازين .لأنَّ: $\overrightarrow{n_{(Q_1)}}$ وَ $\overrightarrow{n_{(Q_2)}}$ غير مرتبطان خطيا.

يكون (Q_1)وَ (Q_2) متقاطعان في المستقيم (Δ) إذا تحقق مايلي: $((\Delta)\subset(Q_2))\wedge((\Delta)\subset(Q_1))$.

* بتعويض x ; y وَ z الموجودة في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (Q_1) نجد:

$3-2t+2t-3=0$ و منه: $(\Delta)\subset(Q_1)$.

* بتعويض x ; y وَ z الموجودة في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (Q_2) نجد:

$1-t+t-1=0$ و منه: $(\Delta)\subset(Q_2)$.

3) معادلة ديكارتية للمستوي(P) الذي يشمل A ويعامد (Δ):

$(P)\perp(\Delta)$ يعني ذلك أنَّ: $\vec{u}(-2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

معادلة (P) من الشكل: $(P): -2x-y+z+d=0$

$A\in(P)\Leftrightarrow -2x_A-y_A+z_A+d=0$ و منه: $-2(1)-(0)+(-2)+d=0\Rightarrow d=4$

إذن: $(P): -2x-y+z+4=0$

4) .

أ- تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) و المستوي (P)

1- نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي لـ : (Δ) في معادلة المستوي(P).

2- نبحث عن قيمة t .

3- نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ : (Δ) .

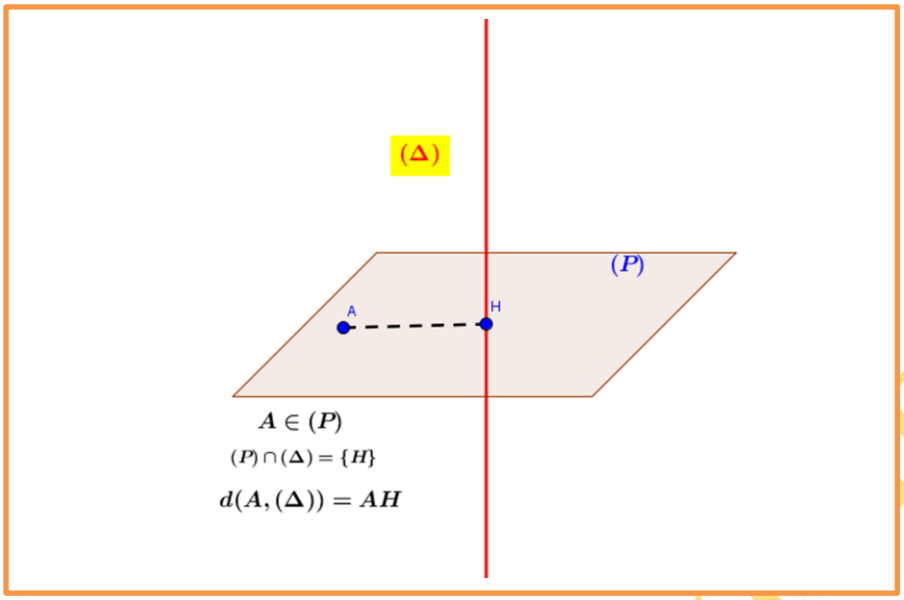
$-2(3-2t)-(1-t)+t+4=0$ بعد التبسيط نجد: $t=\frac{1}{2}$.

$\begin{cases} x=3-2\left(\frac{1}{2}\right) \\ y=1-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ بعد التبسيط نجد: $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

نستنتج أنَّ: $(P)\cap(\Delta)=\{H\}$ حيث $H\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

zebda abdelmalek

ب- بعد النقطة A عن المستقيم (Δ):



$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$

$$AH = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2}$$

$$AH = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{30}{4}}$$

* إستنتاج أنّ (Δ) يقطع (S) في نقطتين:

لدينا: $AH = \sqrt{\frac{30}{4}} \approx 2.74$

أي: $d\left(A,(\Delta)\right) = AH < R$

و منه: (Δ) يقطع (S) في نقطتين

5) G مرجح الجملة $\left\{(C;1),(B;e^t)\right\}$ حيث: $(t \in \mathbb{R})$

أ- إثبا أنّ $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$

لدينا: G مرجح الجملة $\left\{(C;1),(B;e^t)\right\}$ يعني ذلك أنّ: $1\times\overrightarrow{GC} + e^t \times \overrightarrow{GB} = \vec{0}, \ldots..(\Psi)$

zebda abdelmalek

$$(\Psi) \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + e^t \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (1+e^t)\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (1+e^t)\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \frac{-1}{(1+e^t)}\overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{(1+e^t)}\overrightarrow{BC}$$

ب-

لدينا: $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

- دراسة تغيرات الدالة f:

1- النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^t} = 0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(t) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^t} = 1$$

2- الدالة المشتقة:

من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ لدينا : $f' : t \mapsto \frac{-1}{(1+e^t)^2}$ و هذا ما يدّل على أنّ f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3-جدول التغيرات:

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 ↘	0

ج- إستنتاج مجموعة النقط G عندما t يمسح $\mathbb{R}$:

لدينا:

1) $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{(1+e^t)}\overrightarrow{BC}$

2) $\frac{1}{(1+e^t)} \in]0;1[$ من جدول تغيرات الدّالة f.

إذن : نستنتج أنّ $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BC}$ حيث: $k = \frac{1}{(1+e^t)}$ و $k \in]0;1[$

zeinabdelimalek

و منه: مجموعة النقط G عندما t يمسح $\mathbb{R}$ هي $[BC]$

التمرين الثّالث:

لدينا:

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{U};\vec{V})$

النقط A,B وَ C لواحقها $Z_A=-2i$; $Z_B=-\sqrt{3}+i$ وَ $Z_C=\sqrt{3}+i$

1)

أ- الشكل الأسي:

$Z=x+iy$	$\lvert Z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$arg(Z):\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{\lvert Z\rvert}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{\lvert Z\rvert}\end{cases}$	$Z=\lvert Z\rvert e^{i\alpha}$
$Z_A=-2i$	$\lvert Z_A\rvert=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$	$arg(Z_A):\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{0}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{2}{2}\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi.\quad(k\in\mathbb{Z})$	$Z_A=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$
$Z_B=-\sqrt{3}+i$	$\lvert Z_B\rvert=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$	$arg(Z_B):\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\alpha=\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi.\quad(k\in\mathbb{Z})$	$Z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
$Z_C=\sqrt{3}+i$	$\lvert Z_C\rvert=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$	$arg(Z_B):\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi.\quad(k\in\mathbb{Z})$	$Z_C=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

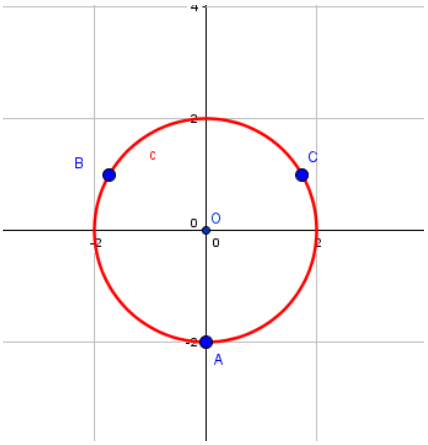
ب- مركز و نصف قطر الدّائرة (C):

نلاحظ أنَّ: $|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=2$ و يعني ذلك أنَّ: $OA=OB=OC=2$

و منه: النقط B,A وَ C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2.

zeda abdelmalek

ج- تعليم النقط B,A وَ C :



2)

1- كتابة العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكّل الجبيري ثم الأسي :

* الشكل الجبري:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{\sqrt{3} + i - (-2i)}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{\left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)}{\left(\sqrt{3} + 3i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{-3 + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 9}{3 + 9}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

zebda abdelmalek

الشكل الأسي:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و منه:

$$\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نستنتج أنّ: $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

* طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = \left[1; \frac{\pi}{3}\right], \ldots (\Phi)$

$(\Phi) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ و منه: المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) r الدَّوران الذّي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- إثبات أنَّ O' صورة النقطة O بالدَّوران r حيث: $Z_{O'} = -\sqrt{3} - i$

العبارة المركبة للدوران r هي: $\left(Z' - Z_A\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z - Z_A\right)$

O' صورة النقطة O بالدَّوران r يعني $\left(Z_{O'} - Z_A\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_O - Z_A\right)$

أي: $\left(-\sqrt{3} - i + 2i\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2i\right)$

zebda abdelmalek

لدينا:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_O - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(2i)$$
$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2e^{i\frac{2\pi+3\pi}{6}}$$
$$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$Z_{O'} - Z_A = -\sqrt{3} - i + 2i$$
$$= -\sqrt{3} + i$$
$$= Z_B$$
$$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

مما سبق نستنتج أنَّ: $(Z_{O'} - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_O - Z_A)$

أي: O' صورة النقطة O بالدَّوران r

ب- إثبات أنَّ $[OC]$ قُطر للدَّائرة (C):

لدينا : قطر الدائرة (C) يساوي $2\times 2 = 4$ .....من جهة

و من جهة أخرى لدينا:

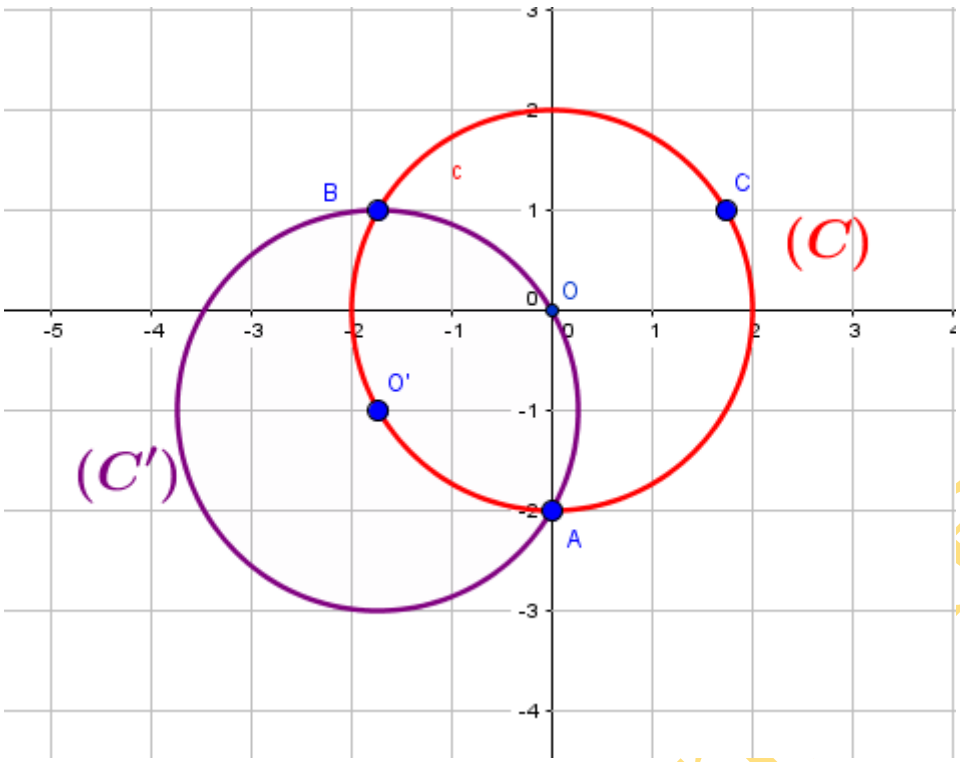
$$O'C = |Z_c - Z_{O'}|$$
$$O'C = \left|\sqrt{3} + i - \left(-\sqrt{3} - i\right)\right|$$
$$O'C = |2\sqrt{3} + 2i|$$
$$O'C = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2}$$
$$O'C = 4$$
$$O'C = 2\times 2$$

نستنتج أنَّ $[OC]$ قُطر للدَّائرة (C)

إنشاء الدَّائرة (C') صورة الدَّائرة (C) بالدَّوران r

بما أنَّ: O' صورة النقطة O بالدَّوران r فإنَّ: (C') صورة الدَّائرة (C) بالدَّوران r

zebda - abdelmalek



ج – التحقق أنَّ الدَّائرتين (C) وَ (C') تشتركان في النقطتين A وَ B.

من السؤال 1 – ب- لدينا: $(A \in (C)) \wedge (B \in (C)); .....(1)$

نثبت الآن أنَّ: $(A \in (C')) \wedge (B \in (C'))$

$$O'A = |Z_A - Z_{O'}|$$
$$O'A = |-2i + \sqrt{3} + i|$$
$$O'A = |-i + \sqrt{3}|$$
$$O'A = 2$$

$$O'B = |Z_B - Z_{O'}|$$
$$O'B = |-\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i|$$
$$O'B = |2i|$$
$$O'B = 2$$

إذن: $(A \in (C')) \wedge (B \in (C')); .....(2)$

من (1) وَ (2)نستنتج أنَّ: (C) وَ (C') تشتركان في النقطتين A وَ B.

zebda abdelkrim

التمرين الرّابع:

الجزء الأوّل:

لدينا: $g(x)=x^2-2x-4ln(x-1)$ وَ (Γ) تمثيلها البياني في الشكل الموالي:

1- تعيين عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ بقراءة بيانية:

من البيان نلاحظ أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما $x=2$ و الآخر α (مثلا) حيث $\frac{5}{2}<\alpha<3$

أي (Γ) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x=2$ وَ α.

2- حساب $g(2)$:

بيانيا: $g(2)=0$ لأنَّ: (Γ) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $x=2$

حسابيا: $g(2)=(2)^2-2(2)-4ln(2-1)=0$

3- إثبات أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $2.87<\alpha<2.88$

من البيان : يظهر أنَّ الدَّالة g :

1- مستمرة على المجال $]-\infty;1[$ و بالتالي على المجال $]2.87;2.88[$

2- متزايدة تماما (رتيبة) على المجال $]-\infty;2.5[$ و بالتالي على المجال $]2.87;2.88[$

ملاحظة: يمكن إثبات ذلك حسابيا.

3- لدينا أيضاً: $g(2.87)=-0.006$ وَ $g(2.88)=0.009$ أي: $g(2.87)\times g(2.88)<0$

إذن: حسب نظرية القيَّم المتوسطة فإنَّ : **المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $2.87<\alpha<2.88$.**

4- إستنتاج إشارة الدَّالة g حسب قيَّم x:

(C_g): تحت محور الفواصل لما: $x\in]2;\alpha[$ و منه الدالة g سالبة تماما على المجال $]2;\alpha[$.

(C_g):تقطع محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين $x=2$ وَ $x=\alpha$.و منه الدالة $g(x)=0$ عند هاتين النقطتين.

(C_g):فوق محور الفواصل لما: $x\in]1;2[\cup]\alpha;+\infty[$ و منه الدالة g موجبة تماما على المجال $]1;2[\cup]\alpha;+\infty[$.

الجزء الثّاني:

لدينا: $f(x)=x-3+4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$ وَ $D_f=]1;+\infty[$

وَ: (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)

أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3+4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}\right)$$

لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-3=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x-1)}{x-1}=0$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{ln(u)}{u}=0$

zebda abdelmalek

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(x-3+\frac{4\ln(x-1)+5}{(x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(x-3+\left(4\ln(x-1)+5\right)\times\left(\frac{1}{(x-1)}\right)\right)$$

للتوضيح

$$=1-3+(-\infty)\times(+\infty)$$

$$=-\infty$$

التفسير الهندسي: $x=1$ **مستقيم مقارب لـ:** (C_f).

2)

إثبات أنَّ: $(\Delta): y=x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ: (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-3)\right)=0$ يعني: $(\Delta): y=x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ: (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}-(x-3)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}\right)$$

$$=0$$

ومنه: $(\Delta): y=x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ: (C_f) بجوار $+\infty$

zebda abdelmalek

ب- إيجاد نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ):

نحل المعادلة: $f(x)=x-3$

لدينا:

$$f(x)=x-3 \Leftrightarrow x-3+4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=x-3$$

$$\Leftrightarrow 4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ln(x-1)+5}{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 4ln(x-1)+5=0$$

$$\Leftrightarrow ln(x-1)=\frac{-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{ln(x-1)}=e^{\frac{-5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x-1=e^{\frac{-5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x=e^{\frac{-5}{4}}+1$$

ج- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) وَ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(x-3)$.

لدينا:

$$f(x)-(x-3)=x-3+4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}-(x-3)$$

$$=4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

$$=\frac{4ln(x-1)+5}{x-1}$$

بما أنَّ: $x\in]1;+\infty[$ فإنَّ إشارة المقام $(x-1)$ موجبة تماماً.

- ندرس إشارة البسط: $4ln(x-1)+5=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{-5}{4}}+1$

zebda abdelmalek

الوضع النسبي:

لـمَّا: $1+e^{\frac{-5}{4}}<x<1$ يعني ذلك أنَّ: $f(x)-(x-3)<0$ و منه: (C_f) يقع تحت (Δ).

لـمَّا: $x=1+e^{\frac{-5}{4}}$ يعني ذلك أنَّ: $f(x)-(x-3)=0$ و منه: (C_f) يقطع (Δ).

لـمَّا: $x>1+e^{\frac{-5}{4}}$ يعني ذلك أنَّ: $f(x)-(x-3)>0$ و منه: (C_f) يقع فوق (Δ).

(3

أ- إثبات أنَّه من أجل $x\in]1;+\infty[$ فإنَّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

لدينا: $f(x)=x-3+4\dfrac{ln(x-1)}{x-1}+\dfrac{5}{x-1}$

و منه:

$$f'(x)=1-0+4\times\frac{\frac{1}{x-1}\times(x-1)-(1)\times ln(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{0\times(x-1)-(1)\times 5}{(x-1)^2}$$

بالتبسيط نجد: $f'(x)=1+\dfrac{4-4ln(x-1)+5}{(x-1)^2}$

نُوَحد المقامات:

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}+\frac{4-4ln(x-1)-5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}+\frac{4-4ln(x-1)-5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+1+4-4ln(x-1)-5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+5-4ln(x-1)-5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-4ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

zebda abdelmalek

ب- استنتاج تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا:

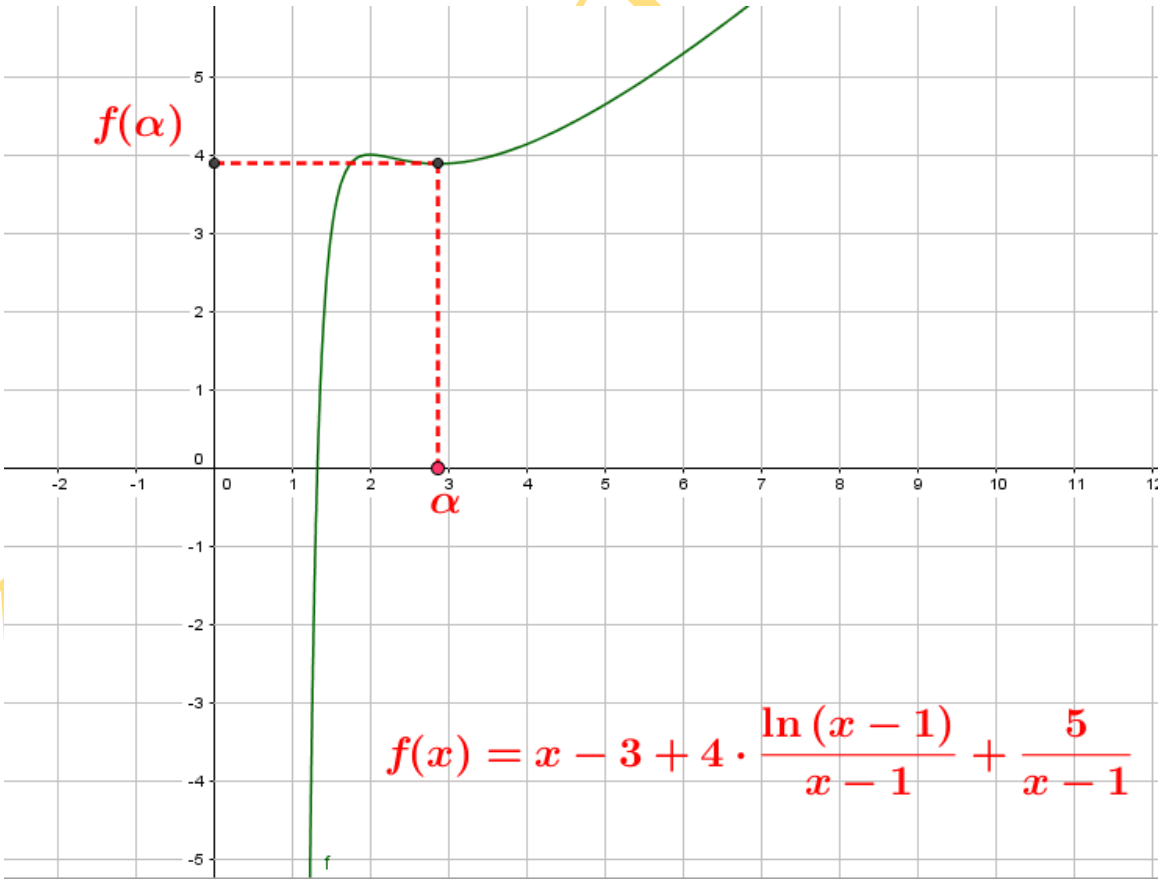
$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ و هذا يعني أنَّ إشارة الدالة f' هي إشارة الدَّالة g.

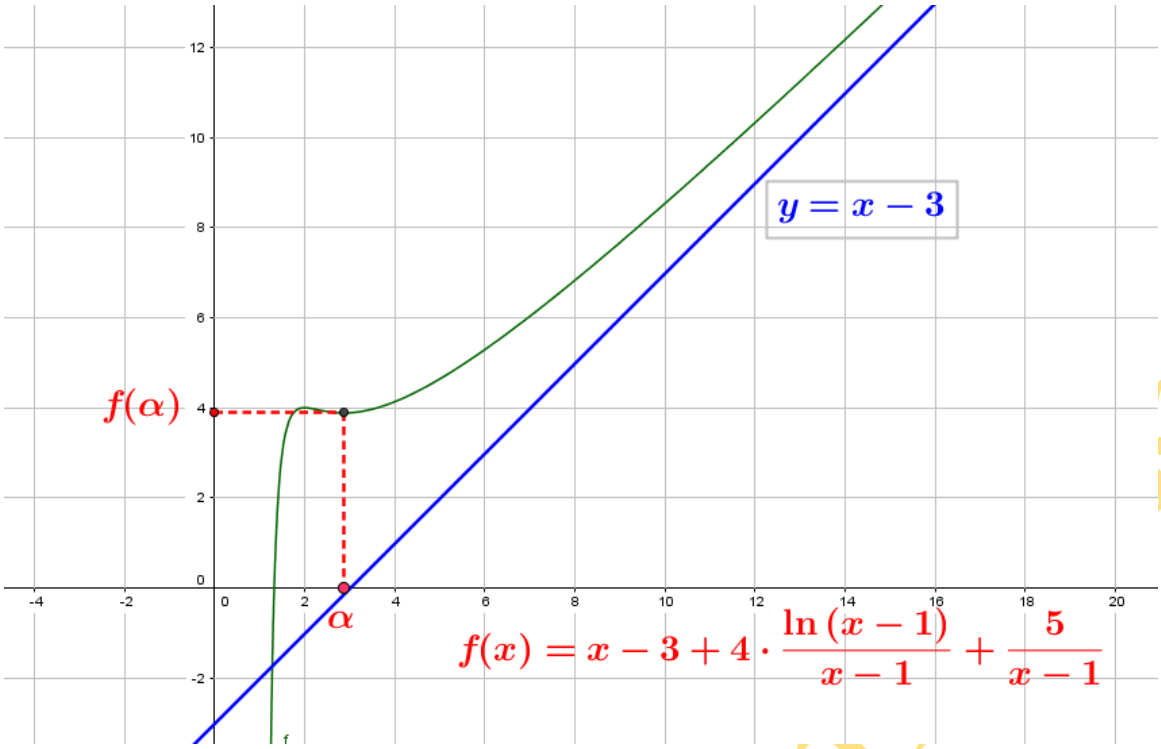
و إشارة الدَّالة g تـمَّ تعيين إشارتها في الجزء الأوَّل.

إذن : يمكننا مباشرة إستنتاج جدول تغيرات الدَّالة f.

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) إنشاء (C_f) وَ (Δ):





5)

أ- تعيين مشتق الدّالة: $h: x \mapsto \left[\ln(x-1)^2\right]$ و $D_h =]1;+\infty[$

$$\left[\ln(x-1)^2\right]' = 2\frac{1}{x-1}\ln(x-1)^{2-1}$$

$$= \frac{2\ln(x-1)}{x-1}$$

الدّالة : $x \mapsto \left[\ln(x-1)^2\right]$ هي أصلية للدّالة $x \mapsto \frac{2\ln(x-1)}{x-1}$

- تعيين F دالة أصلية للدالة f:

لدينا: $f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

يمكن أنْ نكتب: $f(x) = x - 3 + 2\times 2\frac{\ln(x-1)}{x-1} + 5\times\frac{1}{x-1}$

و منه : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\times\ln(x-1)^2 + 5\ln(x-1) + C$ مع $(C \in \mathbb{R})$.

ب- حساب $\int_2^5 f(x)dx$:

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 \left(x-3+4\frac{ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\times l\left(n(x-1)\right)^2 + 5ln(x-1) \right]_2^5$$

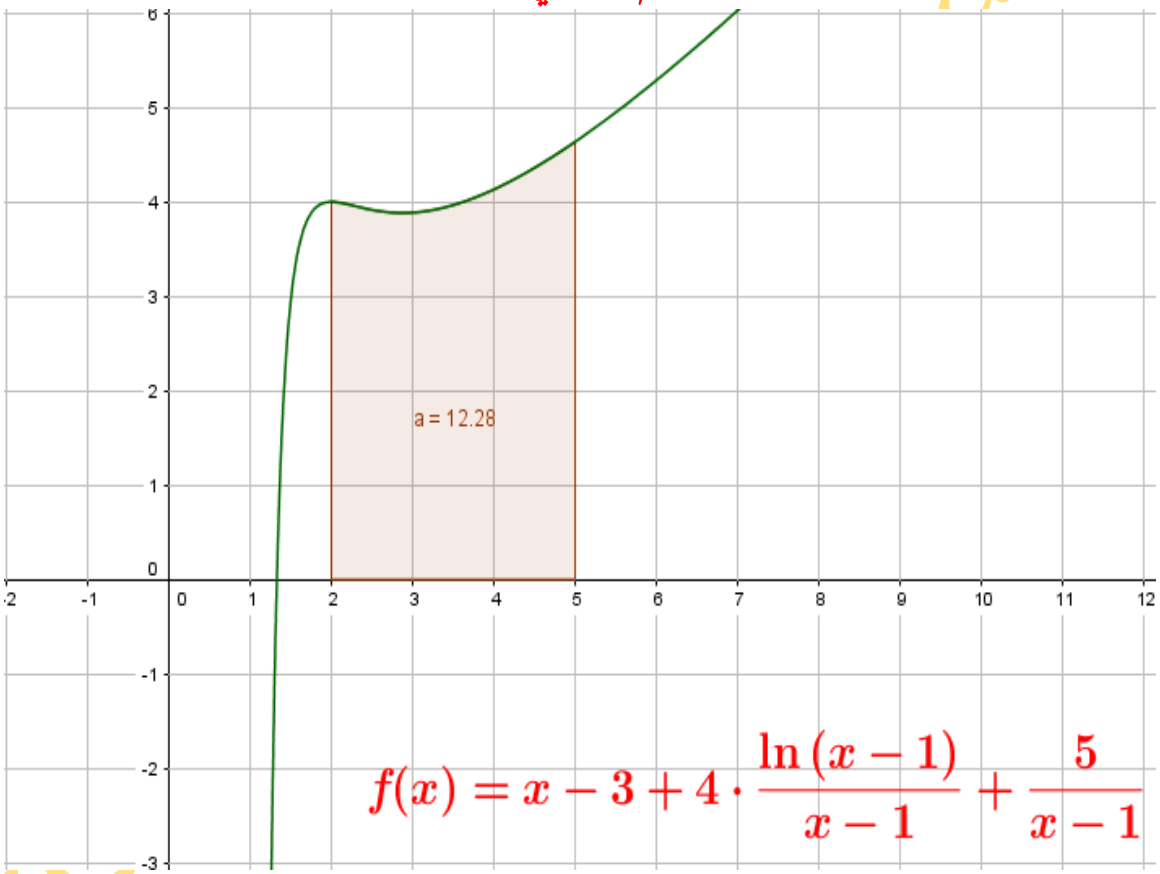
$$= \left[\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5) + 2\times\left(ln(5-1)\right)^2 + 5ln(5-1) \right] - \left[\frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + 2\times\left(ln(2-1)\right)^2 + 5ln(2-1) \right]$$

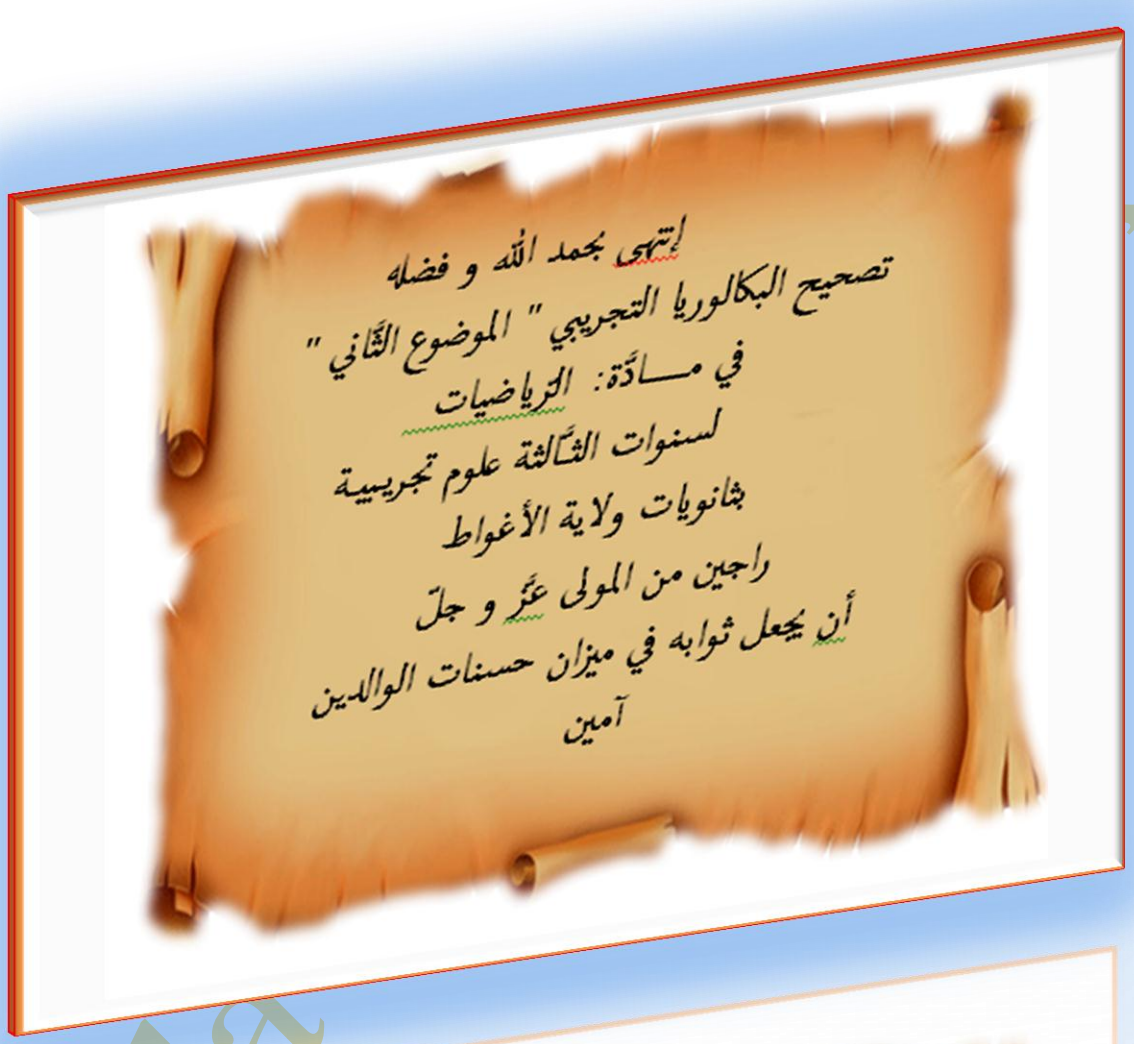
$$= 8.27 - (-4)$$

$$= 12.28$$

التكامل $\int_2^5 f(x)dx$ يمثل مساحة الحيّز تحت و المُحدد بالمستقيمين $x=2$ وَ $x=5$

رسم توضيحي فقط




إنتهى بحمد الله و فضله
تصحيح البكالوريا التجريبي " الموضوع الثّاني "
في مـــادّة: الرياضيات
لسنوات الثّالثة علوم تجريبية
بثانويات ولاية الأغواط
راجين من المولى عزّ و جلّ
أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين

zebda