الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان البكالوريا التجريبي — **المقاطعة الوسطى لولاية عين الدفلى**

الشعبة: علوم تجريبية — **دورة: ماي 2016**

اختبار في مادة الرياضيات — **المدة: 03 سا و 30 د**

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين:

الموضوع الاول:

التمرين الاول: (05 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $Z^2+\alpha Z+4=0 ....(I)$

عين العدد الحقيقي α حتى يكون العدد : $(\sqrt{3}+i)$ حلا للمعادلة (I) ثم إستنتج الحل الآخر .

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نعتبر النقط : D, C, B, A

صور الأعداد المركبة : $Z_A=\sqrt{3}+i$, $Z_B=\overline{Z}_A$, $Z_C=i$, $Z_D=-Z_A$.

أ- أكتب كل من : Z_A , Z_B , Z_C , Z_D على الشكل الأسي .

ب- لتكن المجموعة(Ω)مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Zالتي تحقق : $Z=2e^{i\theta}$, θ تمسح R

- أثبت أن النقط :A, B, D تنتمي للمجموعة (Ω) التي يطلب تعيينها ثم أنشئها .

3) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C محددا نسبته وزاويته .

أ- حدد طبيعة المثلث ABC و احسب مساحته .

ب- بين أن مساحة المثلث $AB'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه S هي $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,ua$.

4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Zالتي تحقق : $Z=Ke^{i\frac{3\pi}{4}}+1$ مع $K\in\mathbb{R}_+^*$

أ- تحقق أن المجموعة (E) تشمل النقطة C ثم عين معادلتها الديكارتية و أنشئها .

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع (Ω) و (E) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. صندوق به 05 كريات بيضاء و 05 كريات سوداء يسحب لاعب و بطريقة عشوائية 03 كريات في ان واحد .

1. ما احتمال الحصول على 03 كريات بيضاء.
2. ما احتمال الحصول على كريتين بيضاوين و كرية سوداء.
3. ما احتمال الحصول على لونين مختلفين.

II. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قيمة الربح بحيث اذا سحب 03 كريات بيضاء يربح 200 دج

و اذا سحب كريتين بيضاوين و كرية سوداء يربح 100 دج والا يخسر 100 دج.

أ. اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب. احسب الامل الرياضي $E(X)$.هل اللعبة مربحة؟

التمرين الثالث:(04 نقاط)

1. لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية متقاربة بحيث: $U_2 + U_3 + U_4 = 14$ و $U_2 = 8$, حدد الاساس q و الحد الاول.
2. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $V_n = \ln(U_n)$.
أ. حدد طبيعة المتتالية (V_n) ثم حدد اتجاه تغير المتتالية (V_n).
ب. احسب بدلالة n المجموع : $V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$.
3. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $w_0 = U_0$ و $w_n = U_0 \times U_1 \times \cdots\cdots U_n$.
   - احسب w_n بدلالة n .ثم حدد نهاية المتتالية (w_n).

التمرين الرابع:(07 نقاط)

الجزء الاول: g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 4 + 8\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1 < \alpha < 2$.
3. استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ ب: $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{ cm}$.

1. بين ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
2. احسب $\lim_{x\to 0}(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
3. احسب $\lim_{x\to +\infty}(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4. احسب $f(1)$و $f(2)$ ثم عين اشارة $f(x)$.
5. بين ان $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x] = 0$.ماذا تستنتج؟
6. بين ان: $f(\alpha) = \frac{-1}{8}\left(\frac{4-\alpha^2}{\alpha}\right)^2$ ثم استنتج حصرا ل $f(\alpha)$.
7. ارسم (C_f) .(نضع $\alpha = 1.3$ و $f(\alpha) = -0.36$).
8. ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(x^2 - 4)\ln x - mx^2 = 0$.

الجزء الثالث: F دالة معرفة على $]0,+\infty[$ب:

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب:

$$\int_1^x \frac{-4}{t^2}\ln t \,\square.$$

2. بين ان الدالة المعرفة ب: $x \mapsto 1 - x + x\ln x$هي الدالة الاصلية المعرفة ب: $x \mapsto \ln x$.
3. استنتج ان: $F(x) = -3 + \frac{4-x^2}{x} + \frac{x^2+4}{x}\ln x$.
4. احسب مساحة الحيز A المحصور بين (C_f) و المستقيمات : $y = 0$ و $x = 2$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول:(05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة$\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$

1. أ) بين أن: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) عين طبيعة المثلث ABC

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC . أنشئ (C)

2. أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $2(z+\overline{z})+z\overline{z}=0$

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ)

3. ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

التمرين الثاني:(04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,,\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$

1. نعتبر النقط : $A\ (-1.0.2)\ ,\ B(1.1.1)\ ,\ C(1.2.2)\ ,\ D(1.1.4)$.

و ليكن (p) و (q) مستويان حيث : $(p): x-y-z-7=0$ و $(q): x-2z-11=0$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيلهما الوسطيين التاليين :

$$(\Delta_1)\begin{cases}x=t+2\\y=-2\\z=-t-1\end{cases}(t\in R)\quad \text{و}\quad (\Delta_2)\begin{cases}x=2s+5\\y=s+1\\z=s-3\end{cases}(s\in R)$$

أ- أثبت أن المستقيمين : (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي .

ب- برهن أن : (p) و (q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ_2) .

2. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ_1) .

أ- أثبت أن معادلة (π) هي : $x-y+z-1=0$, ثم تحقق أنه يشمل النقطة C و لا يشمل D .

ب- بين أن المثلث ABC قائم في B ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

3. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+3=0$$

أ- بين أن (S) سطح كرة يطلب عناصرها المميزة .

ب. عين معادلتي المستويين الموازيين للمستوي (π) و المماسين لسطح الكرة (S) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) f دالة عددية معرفة على $]1, +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x - \ln(x-1)$

أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أدرس حسب قيم x إشارة $f(x) - x$

ت- بين أنه إذا كان $x \in [2, e+1]$ فإن $f(x) \in [2, e+1]$

2) (u_n) متتالية عددية معرفةعلىN كمايلي : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل n من N :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $u_n \in [2, e+1]$

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

ت- برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أحسب نهايتها .

<u>التمرين الرابع: (07 نقاط)</u>

f دالة عددية معرفة على$R - \{ln 2\}$ بالعبارة : $f(x) = x + \dfrac{e^x}{2(e^x - 2)}$

(c_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس حيث: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = 2\,cm$

1) بين أن من أجل كل $x \neq ln\,2$: $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e^x - 2}$

2) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

أ- بين أن من أجل كل $x \neq ln\,2$: $f'(x) = \dfrac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$

ب- أدرس إشارة المشتق ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المنحني(c_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب معادلتيهما .

د- أدرس وضعية المنحني (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \dfrac{1}{2}$.

3) بين أن النقطة $w\left(\ln 2, \ln 2 + \dfrac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c_f) .

أ- بين أن المنحني (c_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما -2

ب- بين أن المعادلة : $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1, 0]$.

ج- أرسم المنحني (c_f) ومستقيماته المقاربة .

د- عين دالة أصلية للدالة h على المجال $]\ln 2, +\infty[$ حيث: $h(x) = x + \dfrac{1}{2} - f(x)$

ه- أ حسب بـ cm^2 المساحة للحيز المحدد بالمنحني (c_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :
$x = ln\,3$ و $x = ln\,5$

التصحيح النموذجي لبكالوريا التجريبي لشعبة العلوم التجريبية.

الموضوع الأول :

حل التمرين 01 :

0,25 ① $(\sqrt{3}+i)$ حل لـ (I) بالتعويض نجد: $\boxed{\alpha=-2\sqrt{3}}$.

② أ) الشكل الأسي لـ : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

01 $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_D=2e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})}$

0,25 ب) $(\Omega): z=2e^{i\theta}$: دائرة مركزها O و $r=2$

0,5 أي $|z_A|=|z_B|=|z_D|=2$: A , B , D نقط من (Ω)

③ العبارة المركبة للتشابه المباشر:

أي $\begin{cases}S(A)=A\\S(B)=C\end{cases}$ $z_C-z_A=a(z_B-z_A)$

ومنه: $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{3}}{-2i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

0,75 ومنه : $a=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

عبارة التشابه S :

$z'=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}z+z_A\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$

أي : $\boxed{z'=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}$

أ) طبيعة المثلث ABC : لدينا : من سبق

0,25 معناه : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=a=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

0,25 ABC قائم في A .

ب) صورة المثلث ABC بالتشابه S هو مثلث $AB'C'$ حيث : $S(A)=A$ نقطة صامدة

$\mathcal{A}_{AB'C'}=k^2\mathcal{A}_{ABC}$: حيث $S(B)=B'$

$S(C)=C'$

$\mathcal{A}_{AB'C'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}AB\cdot AC\right)$

0,5 $AC=\sqrt{3}$, $AB=2$

ومنه : $\mathcal{A}_{AB'C'}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$

0,25 ④ $(E): z=ke^{i\frac{3\pi}{4}}+1$ هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه النقطة I

0,25 $(\vec{OI},\vec{u})=\frac{3\pi}{4}$ ميله : $tg\frac{3\pi}{4}=-1$

أي $C\in(E)$ أي : $i=ke^{i\frac{3\pi}{4}}+1$

0,25 ومنه $-1+i=ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه نوجد $k=\sqrt{2}$ (محقق) .

أي (E) $y=\tan\frac{3\pi}{4}x+c$

0,25 $\boxed{(E): y=-x+1}$

ب) نحل الجملة :

أي : $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y=-x+1\end{cases}$

0,25 أي $2x^2-2x-3=0$ $x=\frac{-1}{2}$

$y=\frac{3}{2}$

0,25 $(\Omega)\cap(E)=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$

التمرين الثاني :

I - 1 - احتمال الحصول على 03 كريات بيضاء

. لدينا عدد الحالات الممكنة $C_{10}^{3} = 120$

. عدد الحالات الملائمة $C_5^3 = 10$

0,5 ومنه الاحتمال هو : $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

2. احتمال الحصول على كريتين بيضاوتين وكرية سوداء هو

0,5 $\frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

3 - ما احتمال الحصول على لونين مختلفين ،

01 $1 - \left(\frac{2C_5^3}{C_{10}^3} \right) = \frac{5}{6}$

II - قانون احتمال المتغير العشوائي :

0,5

$X(x_i)$	-100	100	200
P_i	$\frac{60}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$

الأمل الرياضياتي :

$E = -100\left(\frac{1}{2}\right) + 100\left(\frac{5}{12}\right) + 200\left(\frac{1}{12}\right)$

$= -50 + 41,66 + 16,66$

0,5 $= \boxed{8,32}$

نعم هي مربحة لأن : $E(X) > 0$

التمرين الثالث :

1 - تعيين الأساس والحد الأول : $8 + 8q + 8q^2 = 14$

0,5 $\boxed{q = -\frac{3}{2}}$ مرفوض ; $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ (مقبول)

0,5 الحد الأول $u_0 = \frac{8}{\frac{1}{4}} = \boxed{32}$

2 - 2 طبيعة المتتالية :

0,5 $v_{n+1} - v_n = \ln q = -\ln 2.$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln 2$.

0,5 وبما أن $r = -\ln 2 < 0$ فإن (v_n) متناقصة

0,5 ب - حساب المجموع :

$S_n = \frac{n}{2}\left(\ln 32 + (6 - n)\ln 2\right)$

$= \frac{n}{2}(11 - n)\ln 2$

1+0,5 3 - حساب w_n : $w_n = e^{\frac{n}{2}(10-n)\ln 2}$; $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0.$

$\boxed{2}$

التمرين الرابع :

الجزء الأول : 1. دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها :

0,75 $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $g'(x) = \frac{2x^2+8}{8}$

0,5

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2 - تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

لدينا g مستمرة على $[1,2]$ و

$g(1) \cdot g(2) < 0$; $g(1) = -3$; $g(2) = 8\ln 2$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة ورتابة الدالة g

فإن : $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ;

0,25 3 - إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجزء الثاني :

0,25 + 0,25 1 - تبيان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ، استنتاج التغيرات

على $]0,\alpha]$: f متناقصة

على $[\alpha,+\infty[$: f متزايدة

0,5 2 - حساب النهاية : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $x=0$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

3 - جدول التغيرات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,5

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

4 - حساب f(1) و f(2) والإشارة :

$f(2) = f(1) = 0$,

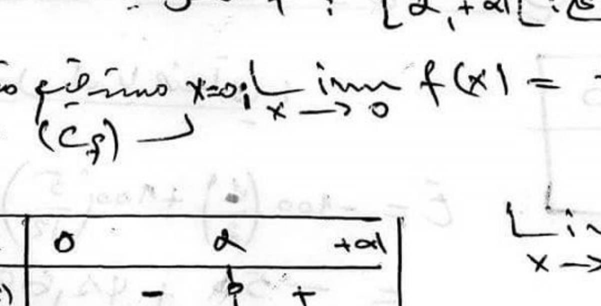
0,5

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,75 5 - تبيان أن : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x] = 0$ ، (C_f) مجاور لمنحنى الدالة $x \mapsto \ln x$ بجوار $+\infty$

0,5 6 - تبيان أن : $f(\alpha) = -\frac{1}{8}\left(\frac{4-\alpha^2}{\alpha}\right)^2$ ولدينا : $-\frac{9}{8} \le f(\alpha) \le 0$

+0,5 7 - المنحنى البياني :



0,75 الجزء الثالث :

1 - حساب المكاملة بالتجزئة :

0,5 $\int_1^x \frac{-4}{t^2} \ln t \, dt = \frac{4}{x}\ln x + \frac{4}{x} - 4$

0,25 2 - تبيان أن : لدينا : $(1 - x + x\ln x)' = \ln x$

3 - استنتاج الدالة الأصلية :

0,25 $F(x) = \frac{4}{x}\ln x + \frac{4}{x} - 4 + 1 - x + x\ln x$

$= -3 + \frac{4-x^2}{x} + \frac{x^2+4}{x}\ln x$

0,25 4 - حساب المساحة : $A = 9\times[F(x)]_1^2 = 1 \times 9\,cm^2 = \boxed{9\,cm^2}$

تصحيح امتحان البكالوريا التجريبي (ماي 2016).

الموضوع الثاني:

التمرين 1 ① حل المعادلة:

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$

0,25 معناه $z=2$ أو $z^2+2z+4=0$

• حل $z^2+2z+4=0$ ...(*)

$\Delta=-12=12i^2$

المعادلة (*) تقبل حلين مركبين مترافقين

0,5 $z_1=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=-1+i\sqrt{3}$

$S=\{2,-1-\sqrt{3}i,-1+\sqrt{3}i\}$

② (أ) إثبات أن $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\pi/3}$

لدينا

0,5 $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\pi/3}$

$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1$, $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$

(ب) طبيعة المثلث ABC

لدينا $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1$ معناه $\frac{CB}{CA}=1$ معناه $CB=CA$

0,25 $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ معناه:

$(\vec{CA},\vec{CB})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

ABC متقايس الأضلاع.

(ج) تعيين مركز و نصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث

$|z_A|=2=OA$

0,75 $|z_B|=2=OB$

$|z_C|=2=OC$

$OA=OB=OC=2$ إذن A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات مركزها $O(0,0)$ و $r=2$

③ (أ) طبيعة (Γ): $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$

معناه $2(x+iy+x-iy)+x^2+y^2=0$

0,5 منه $x^2+y^2+4x=0$ معناه

$(x+2)^2+y^2=4$

(Γ) دائرة مركزها $\Omega(-2,0)$ و $r=2$

(ب) التحقق أن A، B من (Γ)

0,5 $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=2$

$\Omega B=|z_B-z_\Omega|=2$.

③ لدينا R دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(أ) صورة B بالدوران R.

• لدينا $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$

معناه $a=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b=(1-a)z_A=1+i\sqrt{3}$

0,5 $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-\sqrt{3}i)+1+i\sqrt{3}$

أي $z_{B'}=2$ معناه $z_{B'}=z_C$.

ومنه $R(B)=C$

(ب) نعين z_D لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R

0,25 $z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$

• استنتاج طبيعة الرباعي ABCD

الرباعي ABCD معين لأن:

ABCD متوازي أضلاع لأن:

0,5 $z_{\vec{AB}}=2i\sqrt{3}$ | $z_{\vec{AB}}=z_{\vec{DC}}$

$z_{\vec{DC}}=2i\sqrt{3}$

ولدينا $BC=CD$ لأن $R(B)=C$ ، $R(C)=D$

(ج) صورة (Γ) بالدوران R ؛ هي (C)

0,25 لأن $R(B)=C$ و $R(\Omega)=O$

التمرين 2

$\vec{u}_{(\Delta_1)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{u}_{(\Delta_2)}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\neq\frac{0}{1}$

حل الجملة

$\begin{cases}t+2=2s+5 & \text{①}\\ -2=s+1 & \text{②}\\ -t-1=s-3 & \text{③}\end{cases}$ من ②: $s=-3$، من ① إذن $t=-3$

0,5 بالتعويض عن t ، s في (Δ_1) و (Δ_2) نجد النقطتين $(-1,-2,-6)$ ، $(-1,-2,2)$

مستحيل.

(Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي.

ج) $(P)\cap(Q)=(\Delta_2)$: بالتعويض

$$\begin{cases} 2s-5-s-1-s+3-7=0 \\ 2s+5-2(s-3)-11=0 \end{cases}$$

0,5 ج) التمثيل الوسيطي لـ (π) الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ_1)

$$\begin{cases} x=2t+s-1 \\ y=t \\ z=-t-s+2 \end{cases}$$

$(\pi): x-y+z-1=0$

إحداثيات C تحقق وإحداثيات D لا تحقق

0,25 $C\in(\pi)$ و $D\notin(\pi)$ و $ABCD$ رباعي الوجوه

0,5 ب) ABC قائم في B أي $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$V=\frac{1}{3}Bh$ / $h=d(D,(\pi))$

0,5 $V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\right)\sqrt{3}=1\,u.v$

3) أ) $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$

0,5 (S) سطح الكرة التي مركزها $\omega(2,1,1)$ ، $r=\sqrt{3}$

ب- المستويين الموازيين للمستوي (π): $x+y+z+d=0$ مماسين لـ (S) أي: $d(\omega,P)=\sqrt{3}$

أي $\frac{|x_0-y_0+z_0+d|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ومنه $\frac{|d+2|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

0,5 أي $\begin{cases} d+2=3 \\ d+2=-3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} d=1 \\ d=-5 \end{cases}$

ومنه $(P_1): x-y+z+1=0$

$(P_2): x-y+z-5=0$

حل التمرين الثالث:

① $f(x)=x-\ln(x-1)$

إشارة $f(x)-x$:

0,5

x	1	$e+1$	$+\infty$
$-\ln(x-1)$	$+$	0	$-$

• دراسة تغيرات f :

• النهايات:

0,5 $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

0,5 المشتق: $f'(x)=\frac{x-2}{x-1}$

جدول التغيرات:

0,25

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$

من أجل $2\leq x<e+1$ f متزايدة

0,25 وعليه $f(2)\leq f(x)<f(e+1)$

② $\begin{cases} U_0=e+1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

أ) البرهان بالتراجع:

$P(n): 2\leq U_n\leq e+1$

$P(0): 2\leq U_0\leq e+1$ محققة

0,75 نفرض $P(n)$ صحيحة أي:

$2\leq U_{n+1}\leq e+1$

لدينا: حسب السؤال ① فإن:

$2\leq f(U_n)\leq e+1$

$2\leq U_{n+1}\leq e+1$

ب) إتجاه التغير: $U_{n+1}-U_n=-\ln(1-U_n)$

حسب س 1)

0,5 لدينا الفرق: $-\ln(1-x)$ موجب على $]1;e+1]$ أي موجب على $[2,e+1]$

أي $U_{n+1}-U_n\geq0$

ت) تبرير تقارب (U_n): (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $e+1$ فهي متقاربة نحو l.

0,25 $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=l$

نحل المعادلة: $l=f(l)$

$l-\ln(l-1)=$ حسب س 1 حلها: $l=e+1$

معناه:

$\lim_{n\to+\infty}U_n=e+1$

حل التمرين الرابع:

1) نبين أنه من أجل كل $x \neq \ln 2$:

0,5 لدينا: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x-2)} = x + \frac{e^x - 2 + 2}{2(e^x-2)}$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$$

2) أ) حساب النهايات:

01 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} \ln 2} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \overset{<}{\to} \ln 2} f(x) = -\infty$

ب) المشتق:

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x-2)^2}$$

0,5 $$= \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x-2)^2} = \frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$$

ج) إشارة المشتق:

0,25

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

د) جدول التغيرات:

0,5

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1 + \ln 4$	↗	$+\infty$

2) أ) 0,25 $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2(e^x-2)} = 0$

معناه: $y = x$ م م ل (C_f) عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x + \frac{1}{2})\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - 2} = 0$

0,25 معناه: $(\Delta): y = x + \frac{1}{2}$ مقارب ل (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية (Δ) ل (C_f):

0,5

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x) - y = \frac{1}{e^x - 2}$	−	‖	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

3) مركز تناظر:

0,5 $f(2\ln 2 - x) + f(x) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

4) أ) نبين أن (C_f) يقبل مماسين:

أي نحل المعادلة: $f(x) = -2$

بعد الحل: نجد:

0,75 $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

أي $x = \ln 3$ أو $x = \frac{4}{3}$

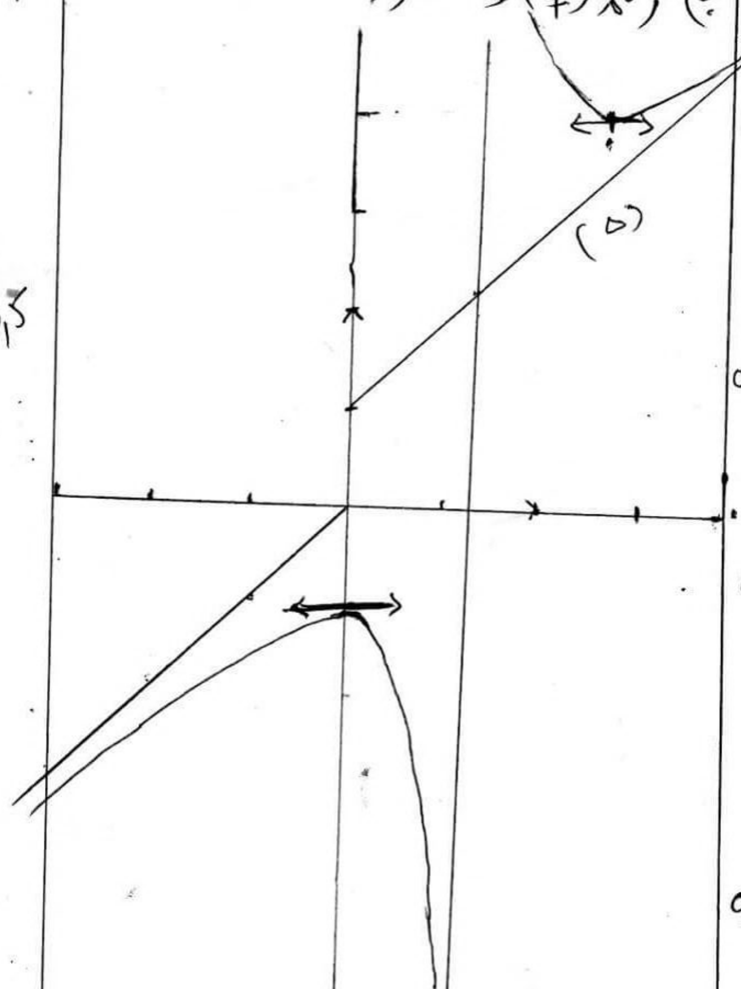
ب) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1;0]$

0,75 و $f(-1) = -1$ ، $f(0) = -\frac{1}{2}$

$-1 \leq -1 < -\frac{1}{2}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد x_0.

ج) رسم (C_f) ومقارباته:

0,5



5) أ) تعيين دالة أصلية ل h على: $]\ln 2; +\infty[$ ، h فرق دالتين مستمرتين على $]\ln 2; +\infty[$ فهي دالة مستمرة على $]\ln 2; +\infty[$ وتقبل دالة أصلية.

- تابع -

$H(x) = \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}x - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}\ln(e^x - 2)$

0,25 $H(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x - 2)$

ب) حساب ب cm^2 المساحة A :

$$A = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \left(f(x) - y\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(e^x - 2\right)\right]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

0,25 $= -\frac{\ln 5}{2} + \frac{1}{2}\ln 3 - \left(\frac{-\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\ln 1\right)$

بعد الحساب نجد:

$A = \left(\ln 3 - \frac{\ln 5}{2}\right) u.a$

0,25 $A = \left(\ln 3 - \frac{\ln 5}{2}\right) \cdot 4$

$$\boxed{A = 2\ln\frac{9}{5}\ cm^2}$$