الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية	
امتحان البكالوريا التجريبي الشعبة : علوم تجريبية	متقن علي جعفر تاجنانت
اختبار في مادة : الرياضيات	

التمرين الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ كمايلي : $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم اشئ (C_f) .

2) (u_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

ا ـ مثل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 و u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الانشاء .

ب ـ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n \succ 1$.

جـ ـ بين ان (u_n) متناقصة تماما مادا . تستنتج ؟

3) ا ـ اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$.

ب ـ بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n-1\leq(\frac{1}{2})^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

4) (v_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$.

ا ـ بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

ب ـ احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+...+\frac{v_n-1}{u_n}$.

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{I};\vec{J};\vec{K})$.

نعتبر النقط $A(3;0;0)$; $B(0;6;0)$; $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$.

1) ا ـ تحقق ان الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) .

ب ـ عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) ا ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد المستوي (ABC) .

ب ـ استنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

جـ ـ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

3) نعتبر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$.

ا ـ عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) ثم اكتب معادلة ديكارتية لها .

ب ـ تحقق ان النقطة H تنتمي الى المجموعة (E) .

التمرين الثالث :

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبرالنقط A ; B ; C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}-i$; $z_B=1-i\sqrt{3}$; $z_C=\sqrt{3}+i$ و $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1) ا ـ انشئ النقط A ; B ; C و D .

ب ـ اكتب كلا من z_A ; z_B ; z_C و z_D على الشكل الاسي .

جـ ـ عين طبيعة الرباعي $ABCD$.

2) ليكن r الدوران الدي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ولتكن E و F صورتا النقطتين A و B على الترتيب بالدوران r .

ا ـ اكتب العبارة المركبة للدوران r .

ب ـ احسب لاحقتي النقطتين E و F .

3) نعتبر (E) مجموعة النقط M دات اللاحقة z من المستوي التي تحقق $(z-\sqrt{3}-i)(\overline{z}-\sqrt{3}+i)=4$.

عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) .

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على R كمايلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

2) استنتج اشارة $g(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x .

II . لتكن الدالة f المعرفة على R كمايلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة $2cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) ا ـ بين ان المستقيم $(\Delta): y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب ـ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة O .

5) بين ان المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها .

6) انشئ المستقيمين (T) ; (Δ) و المنحنى (C_f) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $(2x-1)e^{2x}+x=x+m+1$.

8) ا ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكامل $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx$.

ب ـ احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذوا المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

والله ولي التوفيق

الموضوع الأول

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية ميلة — متقن علي جعفر - تاجنانت

﴿ البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات ﴾ — 2016/05/09

الأقسام: 3 علوم تجريبية — **المدة: 3 ساعات و نصف**

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء (E) منسوب ألى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن (S) مجموعة النقط M(x ;y ;z) من الفضاء بحيث: $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$.

1) بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها Ω و نصف قطرها .

2) أ- تحقق من أن النقطة $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى سطح الكرة (S) .

ب-أكتب معادلة المستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة A .

3) ليكن (Q) المستوي الذي يشمل النقطة $B(1;3;-2)$ و شعاع ناظمي له $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل Ω و يعامد (Q) ثم عين H نقطة تقاطع (D) و (Q).

ت) بين أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

$$z^3-(8-i)z^2+(17-8i)z+17i=0$$

1) أ- برهن أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

ب-بين أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل : $(z+i)(az^2+bz+c)=0$ حيث a , b , c أعداد حقيقية ثابتة يطلب تعيينها.

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقاط A , B , C لواحقها على الترتيب : $z_A=4+i$, $z_B=4-i$, $z_C=-i$

أ) أكتب على الشكل المثلثي و الأسي العدد المركب L حيث : $L=\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_B}$.

ب) برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول النقطة A إلى النقطة B و يحول النقطة B إلى النقطة C يطلب تعيين عناصره المميزة .

ت) حدد طبيعة التحويل النقطي $S\circ S$ و عين عناصره المميزة .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=2-\dfrac{1}{u_n}\end{cases}$

1-أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\geq 1$

ب) أدرس إشارة $u_{n+1}-u_n$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

أقلب الصفحة

YOUCEF MATHS

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 + \frac{1}{-1+u_n}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جـ)نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

- عبر عن S_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

التمرين الثالث: (7 نقاط)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$، (C_f)التمثيل البياني للدالة f المعرفة IR^* كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أثبت أن المنحني (C_f)يقطع المستقيم (Δ)ذا المعادلة : y = 1 في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتهما .

3 – أحسب : f(-x)+ f(x) . ماذا تستنتج ؟

4- بين أن المعادلة : f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا αحيث : $\alpha \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.

5- أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T)يشمل النقطة $A(0;1)$ويمسه في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما .ثم جد معادلة المماس (T) .

6- أرسم (T) و (C_f) في المعلم السابق .

7- أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $y = 1$, $x = 1$, $x = e$

8- hهي الدالة العدية ذات المتغير x المعرفة بـــ : $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

* بين h دالة زوجية .

* أرسم المنحني (C_h) دون دراسة الدالة h . علل إجابتك .

YOUCEFMATHS

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية	
امتحان البكالوريا التجريبي الشعبة : علوم تجريبية	متقن علي جعفر تاجنانت
تصحيح الموضوع الاول	

التمرين الأول :

لدينا $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}$.

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم انشاء (C_f) .

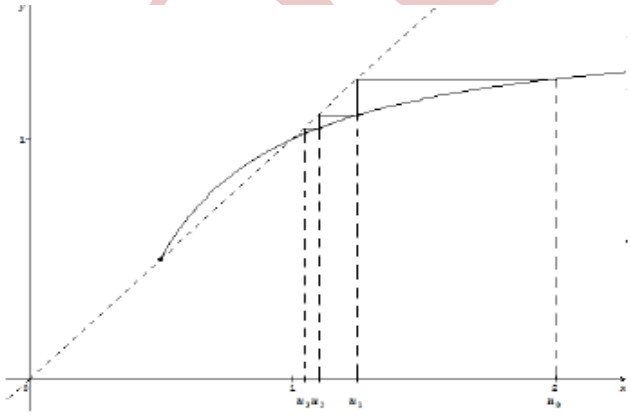
من اجل كل عدد حقيقي x من $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{2}{4x^2}=\dfrac{1}{2x^2}\succ 0$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$ و و لدينا $f(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$.

وبالتالي المنحني (C_f) يكون كما هو مبين في الشكل .

2) (u_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

ا ـ تمثيل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 و u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الانشاء .



ب ـ نبرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n\succ 1$.

لتكن الخاصية P المعرفة على N كما يلي : $P(n)$: "$u_n\succ 1$ .." .

ـ نثبت ان $P(0)$ محققة : لدينا $u_0=2$ ومنه $u_0\succ 1$ اي $P(0)$ محققة .

ـ نثبت ان P وراثية : الفرض ـ نفرض ان $P(n)$ محققة معناه $u_n\succ 1$.

النتيجة ـ نثبت ان $P(n+1)$ محققة معناه $u_{n+1}\succ 1$.

لدينا $u_n\succ 1$ ومنه $f(u_n)\succ f(1)$ لان f متزايدة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ اي $u_{n+1}\succ 1$ ومنه $P(n+1)$ محققة

ومنه P **وراثية** .

ـ خلاصة : من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n\succ 1$.

HAMOUCHE

جـ ـ نبين ان (u_n) متناقصة تماما :

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-3{u_n}^2+3u_n+1}{2u_n}=\frac{(u_n-1)(-2u_n+1)}{2u_n}$

وبما ان $u_n-1\succ 0$ و $-2u_n+1\prec 0$ و $u_n\succ 0$ فان $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

الاستنتاج : بما ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3) ا ـ نثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$:

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2u_n}(u_n-1)$.

ولدينا : $u_n\succ 1$ معناه $2u_n\succ 2$ معناه $\frac{1}{2u_n}\prec\frac{1}{2}$ معناه $\frac{1}{2u_n}(u_n-1)\prec\frac{1}{2}(u_n-1)$

و منه نستنتج **انه من اجل كل عدد طبيعي n فان :** $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$.

بـ ـ نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n-1\leq(\frac{1}{2})^n$:

لدينا من العلاقة السابقة

$$\begin{cases} u_n-1\leq\frac{1}{2}(u_{n-1}-1)\\ u_{n-1}-1\leq\frac{1}{2}(u_{n-2}-1)\\ u_{n-2}-1\leq\frac{1}{2}(u_{n-3}-1)\\ .\\ .\\ .\\ u_1-1\leq\frac{1}{2}(u_0-1)\end{cases}$$

بضرب اطراف المتباينات طرفا لطرف و بعد اختزال العوامل المتساوية نحصل على :

$u_n-1\leq(\frac{1}{2})^n(u_0-1)$ **بما ان** $u_0=2$ **فان** $u_n-1\leq(\frac{1}{2})^n$.

استنتج نهاية المتتالية (u_n) : لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n-1=0$ اي $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=1$.

4) (v_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$.

ا ـ نبين ان المتتالية (v_n) هندسية : من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=\frac{1}{3}$.

بـ ـ حساب المجموع S_n بدلالة n : لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$ معناه $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$.

HAMOUCHE

ومنه $S_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+...+\frac{v_n-1}{u_n}=\frac{v_0-1}{\frac{v_0-1}{2v_0-1}}+\frac{v_1-1}{\frac{v_1-1}{2v_1-1}}+\frac{v_2-1}{\frac{v_2-1}{2v_2-1}}+...+\frac{v_n-1}{\frac{v_n-1}{2v_n-1}}$

اي $S_n=2v_0-1+2v_1-1+2v_2-1+...+2v_n-1$ و منه $S_n=2v_0-1+2v_1-1+2v_2-1+...+2v_n-1$

ومنه $S_n=2(v_0+v_1+v_2+...+v_n)-(n+1)$ ادن $S_n=\frac{4}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]-(n+1)$.

التمرين الثاني :

1) ا ـ نتحقق ان الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) :

لدينا النقط $A(3;0;0)$; $B(0;6;0)$; $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$.

لدينا $\begin{cases}\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{n}=0\end{cases}$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) .

ب ـ تعين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) : $(ABC):4x+2y+3z-12=0$.

2) ا ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) :

بما ان (Δ) يشمل النقطة D ويعامد المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و بالتالي

تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases}x=-5+4\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1+3\lambda\end{cases}$.

ب ـ استنتاج احداثيات النقطة H :

H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) معناه H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC).

معناه $\begin{cases}H\in(ABC)\\ H\in(\Delta)\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=-5+4\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1+3\lambda\\ 4x+2y+3z-12=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=-5+4=-1\\ y=2\\ z=1+3=4\\ \lambda=1\end{cases}$.

$H(-1;2;4)$.

جـ ـ حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) : $d(D;(ABC))=DH=\sqrt{29}$.

3) (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$.

ا ـ تعين طبيعة وعناصر المجموعة (E) : المجموعة (E) هي الكرة ذات القطر DA مركزها منتصف $[DA]$

$\Omega(-1;0;\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=\frac{DA}{2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$ معادلته $(E):(x+1)^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{65}{4}$.

ب ـ تحقق ان النقطة H تنتمي الى المجموعة (E) :

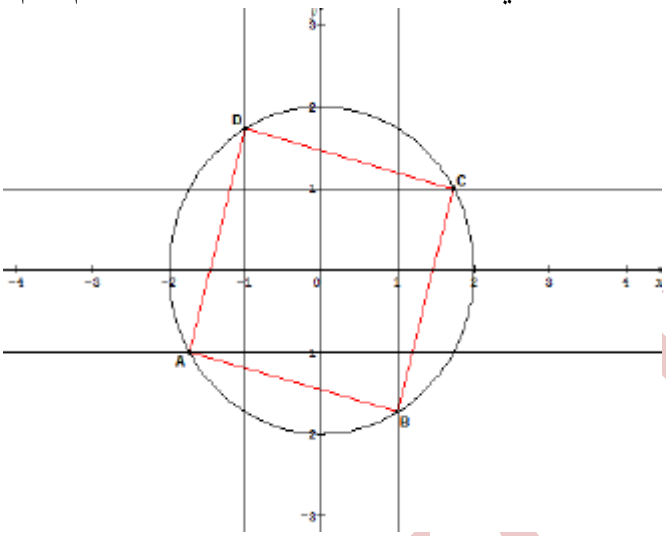
نعوض احداثيات النقطة H في معادلة سطح الكرة فنجدها محققة $(-1+1)^2+2^2+(4-\frac{1}{2})^2=\frac{65}{4}$ ومنه $H\in(E)$.

HAMOUCHE

التمرين الثالث :

1) ا ـ انشاء النقط A ; B ; C و D :

لانشاء النقطة A مثلا نقوم بانشاء الدائرة التي مركزها A و طول نصف قطرها 2 ثم نقوم برسم المستقيم $(\Delta): y=-1$



فيتقاطع هذا المستقيم مع الدائرة في نقطتين النقطة ذات الفاصلة السالبة هي النقطة A ونرسم النقط المتبقية بنفس الطريقة .

بـ ـ كتابة كلا من z_A ; z_B ; z_C و z_D على الشكل الاسي :

لدينا $|A|=2$ و $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{6}$ ومنه $z_A=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; $|B|=2$ و $\arg(z_B)=-\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $|C|=2$ و $\arg(z_C)=\frac{\pi}{6}$ ومنه $z_C=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $|D|=2$ و $\arg(z_D)=\frac{2\pi}{3}$ ومنه $z_D=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

جـ ـ عين طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا $\begin{cases} z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i \\ z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

ولدينا $AB=DC=2\sqrt{2}$ و لدينا كذلك $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}$ لان $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=0$.

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع .

2) r الدوران الدي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ا ـ اكتب العبارة المركبة للدوران r :

$r(M)=M'$ معناه $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+(1-e^{-i\frac{\pi}{3}})z_B$ معناه $z'=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z+2$.

بـ ـ حساب لاحقتي النقطتين E و F :

$r(A)=E$ معناه $z_E=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z_A+2$ معناه $z_E=(2-\sqrt{3})+i$.

$r(B)=F$ معناه $F=B$ لان B صامدة .

HAMOUCHE

3) تعين طبيعة وعناصر المجموعة (E) :

$(z-\sqrt{3}-i)(\overline{z}-\sqrt{3}+i)=4$ معناه $(z-(\sqrt{3}+i))(\overline{z-(\sqrt{3}+i)})=4$

معناه $\left|(z-(\sqrt{3}+i))\right|^2=4$ معناه $|z-z_C|^2=4$ معناه $|z-z_C|^2=4$ معناه $|z-z_C|=2$

$CM=2$ معناه .

ومنه (E) الدائرة ذات المركز C ونصف القطر $r=2$.

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على R كمايلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g :

ا ـ حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ب ـ حساب المشتقة : من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x)=4e^{2x}(2x+1)$.

اشارتها من اشارة $(2x+1)$ لان $4e^{2x}\succ 0$.

جـ ـ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$1+2e^{-1}$	$+\infty$

2) استنتج اشارة $g(x)$: بما ان $1+2e^{-1}\succ 0$ فان $g(x)\succ 0$ من اجل كل عدد حقيقي x .

II . لتكن الدالة f المعرفة على R كمايلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$.

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}-e^{2x}+x+1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f : من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=1+4xe^{2x}=g(x)$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

.

3) ا ـ بيان ان المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}-e^{2x}=0$ ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

HAMOUCHE

ب ـ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) :

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x)-y_{(\Delta)}=(2x-1)e^{2x}$ اشارتها من اشارة $(2x-1)$.

ـ اذا كان $x \prec \frac{1}{2}$ فان (C_f) يقع تحت (Δ) .

ـ اذا كان $x \succ \frac{1}{2}$ فان (C_f) يقع فوق (Δ) .

ـ اذا كان $x=\frac{1}{2}$ فان (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيين $(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$.

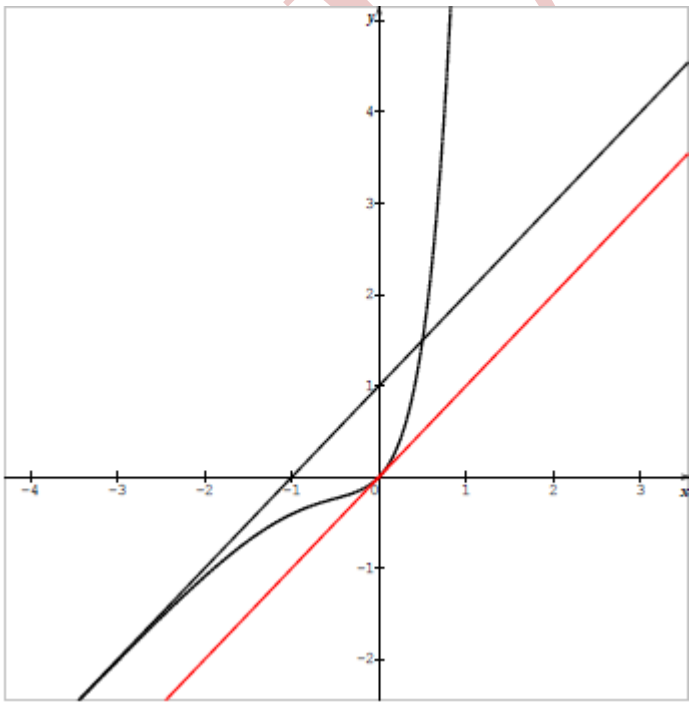
4) معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة O : $(T): y=x$.

5) بين ان المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف :

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f''(x)=4e^{2x}(2x+1)=g'(x)$ تنعدم وتغير اشارتها عند القيمة $x=-\frac{1}{2}$

و المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياها $(-\frac{1}{2};-2e^{-1}+\frac{1}{2})$.

6) انشاء المستقيمين (T) ; (Δ) و المنحنى (C_f) :



7) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد واشارة حلول المعادلة $(2x-1)e^{2x}+x=x+m+1$:

لدينا : $(2x-1)e^{2x}+x=x+m+1$ معناه $(2x-1)e^{2x}+x+1=x+m+2$

معناه $f(x)=x+m+1$ الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم $(\Delta_m): y=x+2+m$.

ـ اذا كان $m+2 \prec 0$ اي $m \prec -2$ فالمعادلة لا تقبل حلولا .

ـ اذا كان $m+2=0$ اي $m=-2$ فالمعادلة تقبل حل $x=0$.

ـ اذا كان $0 \prec m+2 \prec 1$ اي $-2 \prec m \prec -1$ فالمعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

ـ اذا كان $m+2 \geq 1$ اي $m \geq -1$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

HA'LICHE

8) ا ـ حساب التكامل $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx$:

نضع : $u(x)=2x-1$ ومنه $u'(x)=2$.

$v'(x)=e^{2x}$ ومنه $v'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx\,0=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=1 .$$

بـ ـ حساب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) **و المماس** (T) **و المستقيمين ذوا المعادلتين** $x=0$ **و** $x=1$ **:**

$$S=\int_0^1 (f(x)-x)dx=\int_0^1 \left((2x-1)e^{2x}+x+1-x\right)dx=\int_0^1 \left((2x-1)e^{2x}+1\right)dx$$

$$=\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx+\int_0^1 dx=1+[x]_0^1=2a.u=8cm^2$$

تمت بحمد الله

HAMOUCHE

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

(S) معادلة الفلكة من الفضاء / M(x,y,z) نقطة
$x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1/ برهان ان (S) هي سطح كرة:
$a^2+b^2+c^2-4d = 0^2+(-4)^2+2^2-4(2)$
$= 12 > 0$

ومنه مجموعة النقاط (S) هي سطح كرة نصف قطرها
$r = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$.

ومركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$ ومنه $\Omega(0,2,-1)$.

2) أ- التحقق أن النقطة A(-1,1,0) تنتمي إلى سطح الكرة (S).
$(-1)^2+1^2+0^2-4(1)+2(0)+2=0$
$1+1-4+2=0$
محققة ومنه $A \in (S)$.

ب/ كتابة معادلة المستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في A.
وهو المستوي الذي يشمل A و شعاع ناظمي له $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

ومنه معادلة المستوي (P) من الشكل.
$-x-y+z+d=0$.
$A(-1,1,0) \in (P)$
ومنه:
$-(-1)-1+0+d=0$.
ومنه $d=0$
إذن معادلة (P):
$-x-y+z=0$.

3) المستوي (Q) الذي يشمل B(1,3,-2) و شعاع ناظمي له $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

أ) كتابة معادلة (Q).
$x+y+z+d=0$.
$1+3+(-2)+d=0$
$2+d=0$ ومنه $d=-2$

إذن معادلة المستوي (Q) هي:
$x+y+z-2=0$.

ب/ تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل B ويعامد (Q)!
إذن $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لـ (D).

$\begin{cases}x=t\\y=t+2\\z=t-1\end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ومنه

هو تمثيل وسيطي لـ (D).

تعيين إحداثيات H وهي نقطة تقاطع (D) مع (Q).

$\begin{cases}x=t\\y=t+2\\z=t-1\\x+y+z-2=0.\end{cases}$

بالتعويض،
$t+(t+2)+(t-1)-2=0$.
$3t-1=0$ ومنه $t=1/3$

بالتعويض نجد: $H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

ج/ برهان أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S)
$d(\Omega,Q) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$= \frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3}$

$d(\Omega,Q) < r$
ومنه المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها H ونصف قطرها R حيث
$R^2+d^2=r^2$ ومنه $R^2=r^2-d^2$
$R^2=(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3-\frac{3}{9}=\frac{24}{9}$.
ومنه $R=\frac{\sqrt{24}}{3}$.

التمرين الثاني :

$z^3-(8-i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ ..(E)

1) أ/ برهان ان المعادلة (E) تقبل حل حقيقي وحيد $z_0=\alpha i$

$(\alpha i)^3-(8-i)(\alpha i)^2+(17-8i)(\alpha i)+17i=0$ ومنه

$-\alpha^3 i+8\alpha^2-\alpha^2 i+17\alpha i+8\alpha+17i=0$

$(8\alpha^2+8\alpha)+(-\alpha^3-\alpha^2+17\alpha+17)i=0$

$\begin{cases}8\alpha^2+8\alpha=0 & \dots(1)\\ -\alpha^3-\alpha^2+17\alpha+17=0 & \dots(2)\end{cases}$

حل المعادلة (1) هو $\alpha=0$ أو $\alpha=-1$

من اجل $\alpha=0$ المعادلة (2) غير محققة.

من اجل $\alpha=-1$ المعادلة (2) محققة

ومنه حل المعادلة هو $\alpha=-1$.

ومنه المعادلة (E) تقبل حل تخيلي صرف هو $z_0=-i$

ب/ برهان انه يمكن كتابة (E) على الشكل:

$(z+i)(az^2+bz+c)=0$.

$az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci=0$ ومنه

بالمطابقة مع المعادلة (E) نجد:

$\begin{cases}a=1\\ b+ai=-8+i\\ c+bi=17-8i\\ ci=17i\end{cases}$

ومنه

$\begin{cases}a=1\\ b=-8\\ c=17\end{cases}$

وتصبح المعادلة (E) على الشكل:

$(z+i)(z^2-8z+17)=0$.

حل المعادلة (E):

$z+i=0$ أو $z^2-8z+17=0$.

$z=-i$

$\Delta=64-4(17)=-4=(2i)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين

$z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$

$z_2=\frac{8-2i}{2}=4-i$

$S=\{-i,\ 4-i,\ 4+i\}$.

2) أ/ تعليم النقط A، B، C

$z_A=4+i$ $z_B=4-i$ $z_C=-i$

ب/ كتابة L على الشكل المثلثي حيث

$L=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_B}=\frac{4-i+i}{4+i-4+i}=\frac{4}{2i}$

$=\frac{2}{i}=-2i$.

$L=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

وهو الشكل المثلثي لـ L

$L=2e^{-i\pi/2}$

وهو الشكل الأسي لـ L

ج/ برهان وجود تشابه مباشر S يحول A إلى B و B إلى C معناه

$A\xrightarrow{S}B$ معناه $z_B=az_A+b$

$B\xrightarrow{S}C$ $z_C=az_B+b$

$z_B-z_C=a(z_A-z_B)$.

$a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_B}=-2i$.

$Arg(a)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$, $|a|=2$.

$b=z_C-az_B=-i+2i(4-i)$

$b=2+7i$

ومنه العبارة المركبة لـ S هي

$z'=-2iz+2+7i$.

ومنه S هو تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ومركزه النقطة Ω ولاحقتها

$z_0=\frac{b}{1-a}=\frac{2+7i}{1+2i}$

$z_0=\frac{16}{5}+\frac{3}{5}i$

YOUCEFIMATHS

تحديد طبيعة التحويل $S_{O,5}$

نعلم أن مركب تشابهين مباشرين لهما نفس المركز ω هو تشابه مباشر مركز ω نسبته جداء النسبة وزاويته مجموع الزاويتين وهو

$S_{\omega,-\frac{\pi}{2},20} \circ S_{\omega,-\frac{\pi}{2},2}$

$= S_{\omega,-\pi,4}$.

$a' = 4(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -4$.

وهنه $S_{O,5}$ هو تحاكي نسبته -4 ومركزه ω لاحقها z_0.

التمرين الثالث:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n} \end{cases}$

1) أ. البرهان بالتراجع أنه:

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يمكن $U_n \geq 1$

- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

$U_0 = 2 \geq 1$ محققة.

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها مع $n+1$.

لدينا من الفرض $U_n \geq 1$

وهنه $\frac{1}{U_n} \leq 1$.

وهنه $-\frac{1}{U_n} \geq -1$ بإضافة 2 نجد

$2 - \frac{1}{U_n} \geq 2 - 1$

$U_{n+1} \geq 1$

وهنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يمكن $U_n \geq 1$

ب) أي أن المتتالية (U_n) متتالية من الأعداد الموجبة

ب/ دراسة اتجاه $U_{n+1} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{1}{U_n} - U_n$

$= \frac{-(U_n+1)^2}{U_n} < 0$

وهنه المتتالية (U_n) متناقصة.

جـ) (U_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة.

2) لتكن المتتالية (V_n) حيث:

$V_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$.

أ) برهان أن (V_n) متتالية حسابية

$V_{n+1} = 3 + \frac{1}{U_{n+1} - 1}$

$= 3 + \frac{1}{2 - \frac{1}{U_n} - 1} = 3 + \frac{1}{1 - \frac{1}{U_n}}$

$= 3 + \frac{U_n}{U_n - 1}$.

$V_{n+1} - V_n = 3 + \frac{U_n}{U_n - 1} - 3 - \frac{1}{U_n - 1}$

$= \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = 1$

وهنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $V_0 = 4$.

ب/ عبارة V_n بدلالة n

$V_n = n + 4$

لدينا $V_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$ ومنه $U_n = 1 + \frac{1}{V_n - 3}$

$U_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

$= \frac{n+1}{2}(4 + n + 4)$

$= \frac{(n+1)}{2}(n+8)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

YOUCEFIMATHS

$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$.

$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

المشتق:

$f'(x) = \frac{\ln(x^2) - 2}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{2(\ln|x| - 1)}{x^2}$.

إشارة المشتق:

$f'(x) = 0$ معناه $\ln|x| - 1 = 0$

$\ln|x| = 1$ معناه $|x| = e$.

معناه $x = e$ أو $x = -e$.

$f'(x) < 0$ معناه $\ln|x| - 1 < 0$

معناه $|x| < e$

معناه $x \neq 0$ و $-e < x < e$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-e$		0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	$-\infty$ $\quad +\infty$	↘	$1-\frac{2}{e}$	↗ 1

$f(-e) = 1 + \frac{2}{e}$ $\quad f(e) = 1 - \frac{2}{e}$.

2) برهان أن (C_f) يقطع (Δ): $y = 1$ في نقطتين.

$f(x) = 1$ معناه $-\frac{\ln x^2}{x} = 0$

$x^2 = 1$ ومنه $x = 1$ أو $x = -1$.

ومنه (C_f) يقطع (Δ) في نقطتين

$A(-1, 1)$ $B(1, 1)$

3) حساب $f(-x) + f(x)$.

$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

$= 1 + \frac{\ln x^2}{x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2$

سنبرهن أن (C_f) يقبل مركز تناظر في النقطة $H(0, 1)$.

4) برهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α / $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

- f مستمرة على $]-\infty, 0[$ فهي مستمرة على المجال $[-1, -1/2]$.

- f متناقصة على المجال $[-e, 0[$ فهي متناقصة (رتابة) على المجال $[-1, -1/2]$

$f(-1) \cdot f(-1/2) < 0$ لأن

$f(-1) = 1$, $f(-1/2) = -1,77$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

5) برهان أن (C_f) تقبل مماس (T) يشمل النقطة $A(0, 1)$.

نفرض أن a هي فاصلة نقطة التماس ومنه معادلة (T):

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$A(0, 1) \in (T)$ معناه $1 = f'(a)(-a) + f(a)$.

$-a f'(a) + f(a) = 1$.

$-a \cdot \frac{2(\ln|a| - 1)}{a^2} + 1 - \frac{2\ln|a|}{a} = 1$

$-4\ln|a| + 2 = 0$.

$\ln|a| = 1/2$ ومنه $|a| = e^{1/2}$

ومنه $a = \sqrt{e}$ أو $a = -\sqrt{e}$

ومنه توجد نقطتين يكون عندها المماس يشمل $A(0, 1)$ هما النقطتان

$H_1(\sqrt{e}, 1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$H_2(-\sqrt{e}, 1 + \frac{1}{\sqrt{e}})$

معادلة المماس (T)

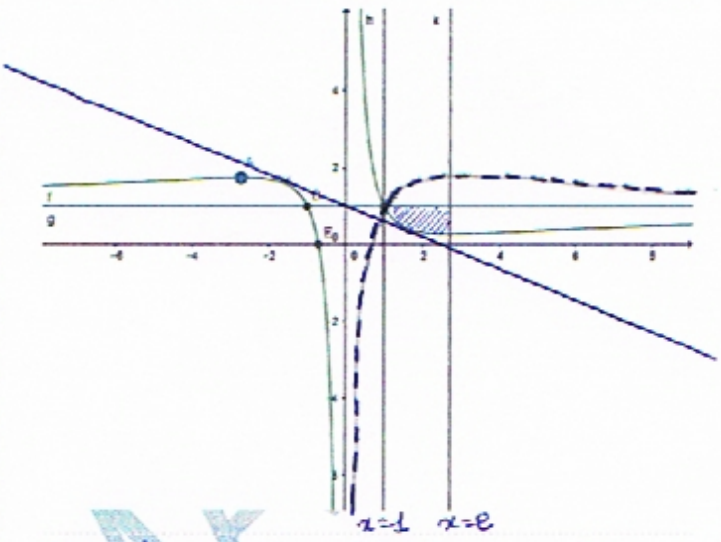
$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$.

YOUCEFIMATHS

$y = \frac{-1}{e}(x - \sqrt{e}) + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$

$y = \frac{-1}{e}x + 1$

وهي معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$.



(7) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=e$، $x=1$، $y=1$

$$S = \int_1^e \left[1 - f(x)\right] dx$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x^2}{x}\, dx$$

$$\int_1^e \frac{2}{x}\ln x\, dx = \int 2u'.u$$

$$= \left[(\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= 1 \text{ u.a}$$

(8) لدينا $h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

برهان أن h دالة زوجية:

$x \in \mathbb{R}^*$ مجموعة تعريف

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|}$$

$$= 1 + \frac{\ln(x^2)}{|x|} = h(x)$$

وبما أن h دالة زوجية.

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{x} \quad \text{لما } x > 0$$

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{-x} \quad \text{لما } x < 0$$

$$= 1 - \frac{\ln(x^2)}{x} \quad \text{لما } x \in]-\infty, 0[$$

$$= f(x) \quad \text{لما } x \in]-\infty, 0[$$

ومنه فإن منحنى الدالة h يكون منطبقا على (C_f) في المجال $]-\infty, 0[$

أما في المجال $]0, +\infty[$ فيرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

لأن h دالة زوجية.

YOUCEFMATH