امتحان تجريبي في الرياضيات شعبة العلوم التجريبية الأستاذ ساعد

المدة : 3 ساعات ونصف التاريخ : 6 ماي 2016

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط C,B,A لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$.

-1 أ) بين أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عين طبيعة المثلث ABC.

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC. أرسم $(\mathcal{C})$.

-2 أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

-3 ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R.

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R.

التمرين الثاني :(05نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط

$A(1;4;-5), B(3;2;-4), C(5;4;-3)$

$D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1) بيَن أن $x-2z-11=0$ معادلة للمستوى (ABC).

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$.

أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ ، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) و استنتج أن (S) مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له.

ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

(u_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1. أحسب u_1,u_2,u_3.

2. ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le n+3$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. نضع : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$

– أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$.

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-1$.

5- أ) بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

ب) بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0<x_0<0.2$.

ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أحسب f(-1) ثم أرسم (T)، (Δ) و (C_f).

6- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$.

7- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير .

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط

$A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوى $(P): x+y+z-3=0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم.

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A.

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A.

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC).

التمرين الثاني :(04 نقاط)

نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث، $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$.

1) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A, B و E التي لواحقها

z_1 ، z_2 و $z_3=z_1+z_2$ على الترتيب.

أ) برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب) استنتج أن الرباعي $OAEB$ مربع.

3) أ) بين أن : $OE=2\sqrt{6}$ و أن $\left(\vec{u};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{5\pi}{12}$.

ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ج) أحسب z_3^{2016} .

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- **الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g.

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0;+\infty[$.

- **الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

ج) بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $0.41<\alpha<0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

3ـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=m-x$.

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا

تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : علوم تجريبية

تصحيح الموضوع الاول

التمرين الأول :

I. حل المعادلة $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$:

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

$z-2=0$ معناه $z=2$

- حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$

- حساب المميز : $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$

نضع $\Delta=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\left\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\right\}$

II. لدينا : $z_A=-1+i\sqrt{3}, z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$

1- أ) تبيان أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

- لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$

- ومنه $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}=\dfrac{6}{12}+i\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- أي $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لان :

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

- لدينا : $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1$ ومنه $\dfrac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$

ولدينا : $Arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ ومنه

ABC مثلث متقايس الأضلاع.

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC :

- لدينا : $|z_A|=2=OA$ ، $|z_B|=2=OB$ و $|z_C|=2=OC$

وبالتالي : $OA=OB=OC=2$ أي النقط A,B و C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r=2$

2- **أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:**

$$2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$$

$2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ معناه $2(x+iy+x-iy)+x^2+y^2=0$

ومنه $x^2+y^2+4x=0$ وبالتالي : $(x+2)^2+y^2=4$

أي أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

ب) التحقق من أن A و B تنتميان إلى (Γ):

- لدينا : $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|-1+i\sqrt{3}+2|=|1+i\sqrt{3}|=2=r$
- ولدينا : $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=|-1-i\sqrt{3}+2|=|1-i\sqrt{3}|=2=r$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ).

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

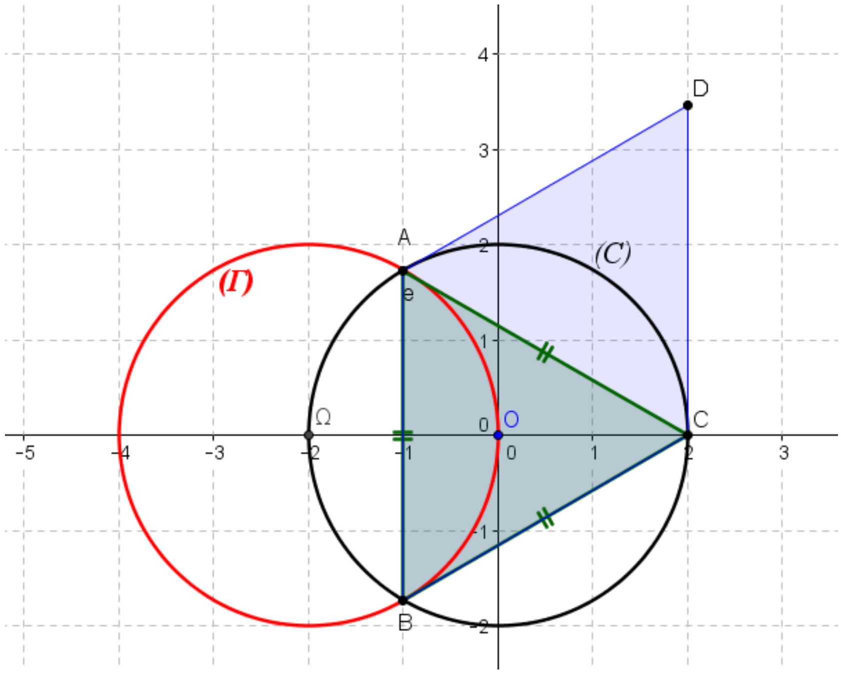
- لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$
- ولدينا : $a=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1+i\sqrt{3})=1+i\sqrt{3}$
- إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-i\sqrt{3})+1+i\sqrt{3}=2=z_C$

ومنه $R(B)=C$

أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$$

أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$



- **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:**

الرباعي $ABCD$ معين لأن :

- $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overrightarrow{AB}} = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$z_{\overrightarrow{DC}} = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 = 2i\sqrt{3}$

أي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} = 2i\sqrt{3}$

ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

ج) **صورة (Γ) بالدوران R :**

هي $(\mathscr{C})$ لأن $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

التمرين الثاني :

$A(1;4;-5), B(3;2;-4), C(5;4;-3), D(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$

1) تبيان أن $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) :

نعوض بإحداثيات النقط A,B,C في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases} 1 - 2(-5) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 3 - 2(-4) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 5 - 2(-3) - 11 = 11 - 11 = 0 \end{cases}$$

ومنه $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC)

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$:

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T).

$$(T):\begin{cases} x=t-2 \\ y=5t+8 \ (t\in\mathbb{R}) \\ y=-t+4 \end{cases}$$

3) لدينا: $(P): x-y-z=7$

أ) تبيان أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم

$$(\Delta):\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (ABC) نجد:
$11+2t-2t-11=0$ ومنه $0t=0$.
- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (P) نجد:
$11+2t-4-t-t-7=0$ أي $0t=0$

وبالتالي (Δ) محتوى في كل المستويين (ABC) و (P) فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب) اثبات أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي:

- لدينا: $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا أي أن (T) و (Δ) غير متوازيين. فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

نحل الجملة $\begin{cases} 11+2t=t'-2...(1) \\ 4+t=5t'+8...(2) \\ t=-t'+4...(3) \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} t=4 \\ t'=0 \end{cases}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $11+2(4)=0-2$ (مستحيلة) ومنه (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4) لدينا: $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.

- **التحقق من أن $E\in(\Delta)$:**

نعوض بإحداثيات النقطة E في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد:

$$\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$$

ومنه $E\in(\Delta)$

- **التحقق من أن $F\in(T)$:**

نعوض بإحداثيات النقطة F في جملة التمثيل الوسيطي لـ (T) نجد :

$$\begin{cases}-3=t-2\\ 3=5t+8\\ 5=-t+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$$

ومنه $F\in(T)$

5) لدينا : $(S):\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha(\alpha\in\mathbb{R})$

أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S) بدلالة α

- لدينا : $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)-3(-y)-9(-4-z)=\alpha$

أي $18-6x+3y+36+9z=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$

طبيعة المجموعة (S) : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6;3;9)$

ب) تعيين قيمة α بحيث يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$:

- لدينا (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه (S) يمر من منتصف $[FE]$ وليكن I

- إذن
$$x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{3-3}{2}=0$$
$$y_I=\frac{y_E+y_F}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$$
$$z_I=\frac{z_E+z_F}{2}=\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}$$

- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $-6\times0+3\times\frac{3}{2}+9\times\frac{1}{2}+54-\alpha=0$

أي $9+54-\alpha=0$ وبالتالي $\alpha=63$

التمرين الثالث

- لدينا : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1- حساب u_3,u_2,u_1:

$$u_1=\frac{7}{3}\ ;\ u_2=\frac{26}{9}\ ;\ u_3=\frac{97}{27}$$

2- أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\le n+3$

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1) من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=2$ وبالتالي $u_0\le 3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n\le n+3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن : $u_{n+1}\le n+4$

- لدينا : $u_n\le n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2}{3}(n+3)$ إذن $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2}{3}(n+3)+\frac{1}{3}n+1$

وبالتالي : $u_{n+1}\le\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$ أي $u_{n+1}\le n+3$ ومنه $u_{n+1}\le n+3\le n+4$

إذن $u_{n+1}\le n+4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}(2u_n+n+3-3u_n)=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):**

- لدينا : $u_n\le n+3$ ومنه $n+3-u_n\ge 0$ أي $\frac{1}{3}(n+3-u_n)\ge 0$

وبالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

3- لدينا : $v_n=u_n-n$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) البرهان على أن المتتالية (v_n) هندسية:

- لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}(u_n-n)$

أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-0=2$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

- لدينا : $u_n=v_n+n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

لدينا : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ و $T_n=\frac{S_n}{n^2}$

4) حساب S_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (1+2+\ldots+n) = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n}{2}(1+n)$$

وبالتالي $S_n = 2 \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n^2}{2} = 2 \times 3\left(1 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n^2}{2}$

ومنه $S_n = 6 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{2}n^2$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$

التمرين الرابع

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- **حساب النهايات :**

- لدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+2}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} = +\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^2\times e^{-x} - e^2\times xe^{-x}\right) = 1$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

- **جدول التغيرات**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$:

- من أجل $x \in \mathbb{R}$ فان $g(x) \in [0;+\infty[$ ومنه $g(x) \geq 0$

لدينا : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

1- حساب النهايات :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} xe^{-x+2} = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty \end{cases}$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{e^{2}}=0\end{cases}$$

2ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$

- **لدينا :** $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

- **جدول تغيرات الدالة f**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3ـحساب

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=0$$

- **التفسير الهندسي :**

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4ـدراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$

- **ندرس إشارة الفرق** $f(x)-y$:

- **لدينا :** $f(x)-y=xe^{-x+2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5ـأ) تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f):

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

المشتقة الثانية f'' تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

ب) تبيان أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها $0<x_0<0.2$:

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$

ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0<x_0<0.2$

أي (C_f) **يقطع** $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$

ج) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

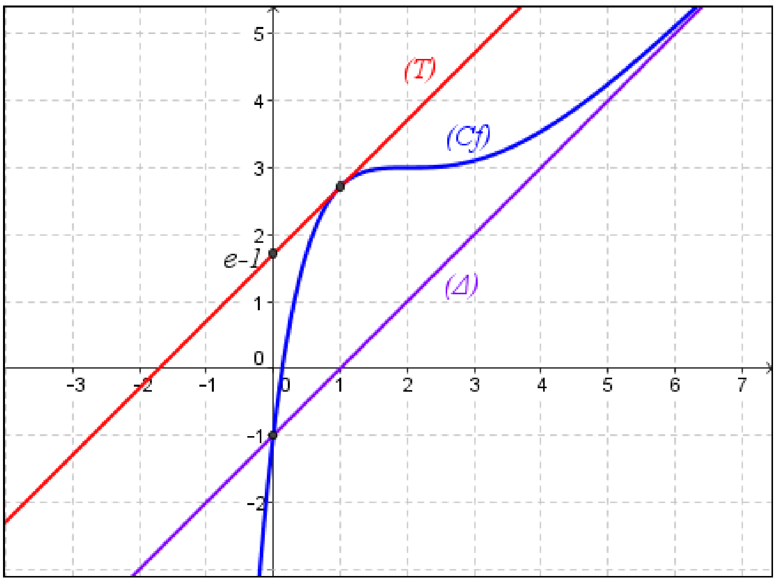
- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T):**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T):y=x-1+e$

د) حساب $f(-1)$:

$f(-1)=-1-1-e^{3}=-2-e^{-3}=-22.09$

الرسم :



6. المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$

$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$

ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (Δ) و (T)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.

إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل .

7. تبيان أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :

- لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

ومن $F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}$

$=x-1+xe^{-x+2}$

أي $F'(x)=f(x)$

- ولدينا : $F(3)=\frac{1}{2}\times 2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

لدينا : $A(3;-2;2)$، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$

1) البرهان على أن المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$

ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A.

2) البرهان على أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

- لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

- إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$

- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$

وبالتالي : المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل: $3x-3z+d=0$

- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :

$3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$

4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

- لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي

$\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$

نضع : $z=t$ وبالتالي : $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}\quad ;(t\in\mathbb{R})$

5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

- **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$

- لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و

$$AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$ $\qquad$ $v_{ABCD}=27uv$

ج) تبيان أن قيس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}rad$:

- لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times6-3(-6)+6\times0=36+18=54$

- ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\|\overrightarrow{DB}\|\times\|\overrightarrow{DC}\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$

أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $\quad cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $BDC=45^\circ$

د) حساب مساحة المثلث BDC :

- $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,BDC=\frac{1}{2}\times9\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) :

لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$

ومنه $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times27}=3$ $\qquad$ $d\left(A,(BDC)\right)=3$

التمرين الثاني :

- لدينا : $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$

1) كتابة العددين z_1,z_2 على الشكل الأسي :

- لدينا : $|z_1|=\sqrt{(3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_1 = Arg(z_1)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

وبالتالي : $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

- لدينا : $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- نضع : $\theta_2 = Arg(z_2)$ إذن $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

وبالتالي : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) لدينا : $z_3 = z_1 + z_2$

أ) البرهان على أنّ المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين :

- لدينا : $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

- ومنه $\dfrac{OB}{OA} = 1$ أي $OB = OA$ و $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

أي أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ب) استنتاج أن الرباعي $OAEB$ مربع :

- لدينا :

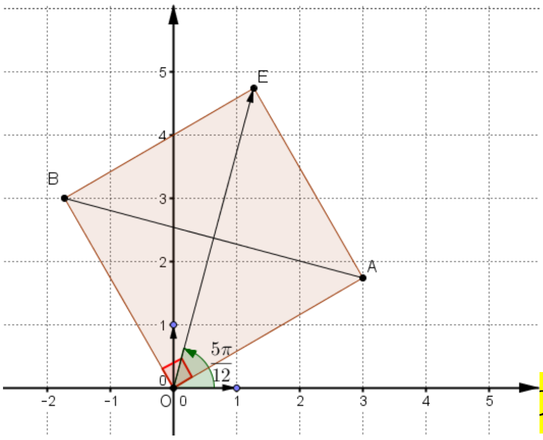
$z_{\overrightarrow{AE}} = z_1 + z_2 - z_1 = z_2$ و $z_{\overrightarrow{OB}} = z_2$

أي أن $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$

ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع .

- ولدينا : OAB مثلث قائم ومتساوي الساقين

وبالتالي $OAEB$ مربع .



3) أ) تبيان أن $OE = 2\sqrt{6}$

- لدينا : $OE^2 = OA^2 + AE^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 12 = 24$

ومنه $OE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

- تبيان أن $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{5\pi}{12}$:

- لدينا : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right)$

ومنه $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$:

لدينا : $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = \left(3 - \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right)$

- ولدينا : $z_3 = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

بالمطابقة نجد :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

و
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ج) حساب z_3^{2016} :

$$z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(\cos\frac{2016 \times 5\pi}{12} + i\sin\frac{2016 \times 5\pi}{12}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}\left(\cos 840\pi + i\sin 840\pi\right)$$

أي $z_3^{2016} = \left(2\sqrt{6}\right)^{2016}$

د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون، $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :

$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا معناه $\left(cos\frac{5n\pi}{12}+i\,sin\frac{5n\pi}{12}\right)$ حقيقيا

ومنه $sin\frac{5n\pi}{12}=0$ وبالتالي $\frac{5n\pi}{12}=k\pi$ أي $5n\pi=12k\pi$

إذن $5n=12k$ ومنه $n=12\left(\frac{k}{5}\right)$ وبالتالي $n=12k'(k'\in\mathbb{N})$

التمرين الثالث:

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

لدينا : $1-\frac{1}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

- لدينا : $\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1} = \frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n = u_{n+1}-u_n$.

- **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

3. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) **اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :**

- لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1} = \frac{3\times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1} = \frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$$

أي $v_{n+1} = 6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1} = 6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1} = 6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها

$q=6$ وحدها الأول $v_0 = \frac{3^0\times u_0}{2u_0-1} = \frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$

ب) **حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :**

- لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$
- استنتاج أن : $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_nv_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_nv_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $\left(2v_n - 3^n\right)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن: $u_n = \frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2\times 6^n - 3\times 3^n}$

ومنه $u_n == -\frac{6^n}{-2\times 6^n - 3\times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2\times 3^n \times 2^n + 3\times 3^n}$ أي $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

- **الجزء الأول :**
- لدينا : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1- دراسة تغيرات الدالة g :

- **حساب النهايات :**

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2 - 2\ln x\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

- **حساب المشتقة :**

$$g'(x) = 2x - 2\times\frac{1}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

x			1		$+\infty$ 0
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- **جدول التغيرات :**

x	1	$+\infty$

	0
$g'(x)$	0 $+$ $-$
$g(x)$	$+\infty$ $+\infty$ 1

2- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$+\infty$ 0
$g(x)$	$+$

- **الجزء الثاني :**

- لدينا : $f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$

1ـ أ) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=-\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$:

- لدينا : $f'(x)=-1-2\left[-\frac{1}{x^2}(1+\ln x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right]=-1-2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

اي $f'(x)=\frac{-x^2+2\ln x}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)<0$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$\parallel \qquad -$

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$\parallel \qquad -$
$f(x)$	$\parallel +\infty \searrow -\infty$

2ـ أ) تبيان أن المستقيم $(\Delta): y=1-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}(1+\ln x)\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)-1+x=-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$

- **جدول إشارة الفرق :**

$f(x)-y=0$ معناه $-\frac{2}{x}(1+\ln x)=0$

ومنه $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$.

x		e^{-1}		0	$+\infty$
$1+ln x$		0	$+$		$-$
$f(x)-y$		0	$-$		$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق	(C_f) يقطع (Δ)			(C_f) تحت (Δ)

ج) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$:

- لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41;0.42]$
- ولدينا : $f(0.41)=1-0.41-\frac{2}{0.41}(1+ln0.41)=0.06$

و $f(0.42)=1-0.42-\frac{2}{0.42}(1+ln0.42)=-0.05$

أي أن $f(0.41)\times f(0.42)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$

د) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ):

- (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي -1 أي $f'(x)=-1$

ومنه $-\frac{x^2-2ln x}{x^2}=-1$ أي $x^2-2ln x=x^2$

وبالتالي $-2ln x=0$ إذن $ln x=0$ ومنه $x=1$

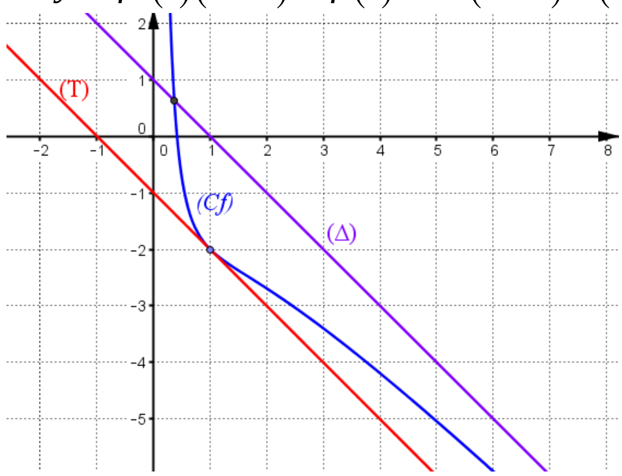
(T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$

- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس** (T):

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+(-2)=-x+1-2=-x-1$$

أي $(T): y=-x-1$

- **الرسم:**



4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=m-x\,(m\in\mathbb{R})$:

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$ الموازي لكل من (T) و(Δ)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا هو $x=1$.
- إذا كان $m\in]-1;1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .

إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا .

قالت إمرأة لزوجها وهي ترفع من شأنها: أنت كالشاي وأنا كالبسكوتة فلا طعم للشاي بدون بسكوتة.... فرد بهدوء قائلا: احذري أن تذوبي في الشاي فتختفين ويبقى الشاي يبحث عن بسكوتة أخرى.

سلطان