يوم 08 – 05 – 2017

اختبار في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (5ن):

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجاس ، نعتبر النقط A ، B و I ذات اللواحق $z_A = 3+2i$ ، $z_B = -3$ و $z_I = 1-2i$ على الترتيب.

1 1.1 علم النقط A ، B و I ، (نكمل الرسم طوال التمرين، الوحدة $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 0.5cm$)

2.1 أكتب على الشكل الجبري العدد $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$، ماذا نستنتج حول طبيعة المثلث IAB؟

3.1 أحسب z_C لاحقة النقطة C، صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 .

4.1 D هو مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$، أحسب z_D لاحقة D.

5.1 بين أنّ $ABCD$ مربع.

2 عين ثم أنشئ Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$

3 نعتبر المجموعة Γ_2 للنقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$.

1.3 بين أن النقطة B تنتمي الى Γ_2

2.3 عين ثم أنشئ المجموعة Γ_2.

التمرين الثاني (3ن):

لتكن (u_n)المتتالية المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1 بين أنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ، فإن ℓ هو جذر لثلاثي الحدود : $P(x) = x^2 + x - 6$.

2 عين جذري الثلاثي الحدود P، نرمز اليهما بـ α و β حيث $\alpha > \beta$

3 من أجل كل n من $\mathbb{N}$، نضع $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

1.3 بين أن المتتاية (v_n)هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

2.3 استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث (4ن):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;-2;4)$، $B(-2;-6;5)$ و $C(-4;0;-3)$.

1 1.1 بين أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

2.1 برهن أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC).

3.1 أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2 1.2 أكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O و يعامد المستوي (ABC).

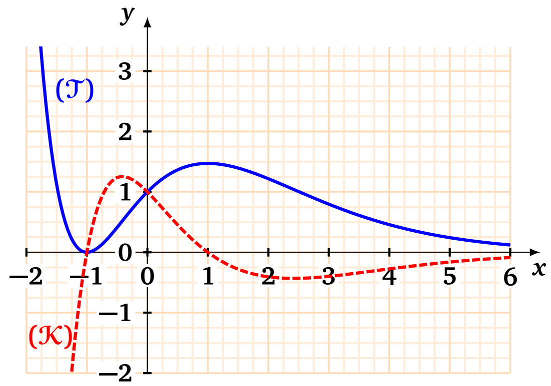
2.2 عين احداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

3 نسمي H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)، t عدد حقيقي بحيث : $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$.

برهن أنّ: $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$، استنتج العدد الحقيقي t و احداثيات النقطة H.

التمرين الرابع (08ن):

1 يعطى في الشكل المقابل المنحنيين $(\mathcal{T})$ و $(\mathcal{K})$ لدالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ احدى هاتين الدالتين هي الدالة المشتقة للأخرى، نرمز اليهما اذن بـ g و g'.



1.1 أرفق كل دالة منهما بتمثيلها البياني.

2.1 على المجال $\left[-\frac{3}{2};5\right]$ شكل جدول تغيرات الدالة g.

3.1 ما هو معامل توجيه المماس للمنحني $(\mathcal{T})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

2 لتكن المعادلة التفاضلية (E): $y'+y=2(x+1)e^{-x}$

1.2 بين أنّ الدالة f_0 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_0(x)=(x^2+2x)e^{-x}$ حل للمعادلة (E).

2.2 حل المعادلة التفاضلية (E'): $y'+y=0$.

3.2 بين أنّ f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة u حيث $u=f-f_0$ حلا للمعادلة (E').

4.2 استنتج من أجل كل x من $\mathbb{R}$، عبارة $f(x)$ عندما تكون f حلا للمعادلة (E).

5.2 علما أن الدالة g المعرفة في الجزء $\boxed{1}$ حلا للمعادلة (E) عين $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

6.2 عين الحل h للمعادلة (E) الذي تمثيله البياني يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه معدوما.

3 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$

1.3 عين نهاية f عند $+\infty$و عند $-\infty$

2.3 نعلم أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، عين دالتها المشتقة و أدرس اشارتها ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3.3 في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (و حدة الطول $2cm$) ، نسمي $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f .

ا عين معادلة لـ (d)مماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة -1.

ب أنشئ المماس (d) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4.3 لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$بـ: $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

ا عين الأعداد الحقيقية a، b و c حتى تكون F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

ب أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$و بمحور التراتيب و محور الفواصل و المستقيم ذي المعادلة $x=1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B و C ذات اللواحق $z_A=2i$، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=2ie^{i\theta}$ على الترتيب، حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

1 نضع $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

1.1 علم النقط A، B و C.

2.1 أحسب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، استنتج بدقة طبيعة المثلث ABC.

2 نفرض أن $\theta\in\left]0;2\pi\right[$.

1.2 تحقق من أن $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

2.2 استنتج أن $z_A-z_C=4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

3.2 عين θ حتى يكون ABC مثلث متساوي الساقين في A.

التمرين الثاني (4ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=5-\dfrac{4}{u_n}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1 أحسب u_1 و u_2 .

2 1.2 بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\leqslant u_n\leqslant 4$.

2.2 بين أنّ (u_n) متزايدة .

3.2 استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3 1.3 برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\leqslant\dfrac{4-u_n}{2}$.

2.3 استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leqslant 4-u_n\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3.3 أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث (5ن):

نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ المار بالنقطة $B(1;-2;1)$ و شعاع ناظم له $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ و المستوي (Ω) الذي معادلة له: $x+2y-7=0$

1 1.1 برهن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و (Ω) متعامدان.

2.1 برهن أنّ تقاطع $(\mathcal{P})$ و (Ω) هو المستقيم (Δ) المار بالنقطة $C(-1;4;-1)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

3.1 لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$، أحسب المسافة بين A و $(\mathcal{P})$ ثم المسافة بين A و (Ω)

4.1 عين المسافة بين A و (Δ).

2 من أجل كل عدد حقيقي t نعتبر النقطة M_t ذات الاحداثيات $(1+2t;3-t;t)$.

1.2 عين بدلالة t الطول AM_t و الذي نسميه بـ $f(t)$ و نفرض عندئذ دالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2.2 أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد قيمتها الحدية الصغرى.

3.2 فسر هندسيا القيمة الحدية الصغرى.

التمرين الرابع (07ن):

1 نعتبر الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي: $g(x)=-x^2+1-2\ln|x|$

1.1 أدرس تغيرات الدالة g.

2.1 أحسب $g(-1)$ و $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$.

2 لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^\star$ كما يلي: $f(x)=-x+2+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\text{cm})$

1.2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^\star$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

2.2 ا أدرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة لـ $(\mathcal{C}_f)$.

ب نسمي (Δ) المستقيم المقارب المائل لـ $(\mathcal{C}_f)$، أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ).

3.2 برهن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^\star$ يكون : $f(-x)+f(x)=4$، ماذا تستنتج؟

4.2 بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0,4;0,5[$.

5.2 ا أنشئ كل من (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

ب ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $1-x^2+x\ln m+2\ln|x|=0$.

6.2 ا أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x;y)$ كما يلي:

$2-x\leqslant y\leqslant f(x)$ و $\alpha\leqslant x\leqslant e$

ب أثبت أنّ $A(\alpha)=\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2+9\ \text{cm}^2$

بالتوفيق للجميع